

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

ANATOLIE HRISTEV

MECANICĂ ȘI ACUSTICĂ



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
BUCUREȘTI

Notă

Lucrarea de față reprezintă cursul predat de autor de cîțiva ani la Facultatea de Fizică a Universității din București, anul I (în cadrul cursurilor de Fizică generală).

Partea experimentală a cursului este editată separat: *Mecanica fizică și Acustică — Lucrări practice*, ediția V, Centrul de Multiplicare al Universității București, 1981; la fel partea aplicativă: *Probleme de mecanică fizică și acustică*, ediția II, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981.

CUPRINS

INTRODUCERE

1. Fizica — știință a naturii	9
2. Teoria și practica	10
3. Schematizarea; modele	11
4. Unități de măsură	11
5. Formule dimensionale	13
6. Obiectul mecanicii	14
7. Observații istorice	14
8. Limitele mecanicii	15
Probleme	15

CAP. 1. CINEMATICA PUNCTULUI MATERIAL

1.1. Relativitatea mișcării. Sistemele de referință	17
1.2. Punct material. Mobil	17
1.3. Traectoria. Ecuațiile mișcării	18
1.4. Viteza pe traiectorie	19
1.5. Vectorul viteză	20
1.6. Accelerația	23
1.7. Curbură și raza de curbură	24
1.8. Accelerațiile tangențială și normală	26
1.9. Mișcarea în câmpul gravitațional (în vid)	29
1.10. Mișcarea circulară	32
1.11. Mișcarea oscilatorie armonică	35
Probleme	35

CAP. 2. PRINCIPIILE DINAMICII

2.1. Principiul inerției (lex prima)	39
2.2. Sistemele de referință inerțiale	40
2.3. Noțiunea de forță	41
2.4. Principiul fundamental (lex secunda)	41
2.5. Greutatea și masa	43
2.6. Principiul acțiunii și reacțiunii (lex tertia)	44
2.7. Transformările lui Galilei	44
2.8. Principiul relativității din mecanica clasică.	47
Probleme	48

CAP. 3. DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL

3.1. Teorema impulsului	49
3.2. Momentul forței. Momentul cinetic	50
3.3. Teorema momentului cinetic	51
3.4. Lucrul mecanic. Puterea	53

Referent științific: prof. dr. fiz. GEORGE MOISIL

Redactor: ing. MARIA BELURI
Tehnoredactor: OPRÎȘEANU ELENA
Grafician: IUFU RODICA

3.5. Teorema energiei cinetice	55
3.6. Energia potențială	56
3.7. Conservarea energiei mecanice	58
3.8. Forțele de frecare	60
3.9. Problemele dinamicii punctului material	61
3.10. Oscilatorul armonic	62
3.11. Pendulul gravitațional simplu (matematic)	63
3.12. Mișcarea circulară	64
Probleme	66

CAP. 4. DINAMICA SISTEMULUI MECANIC

4.1. Forțele interne	72
4.2. Teorema impulsului total	74
4.3. Teorema momentului cinetic total	74
4.4. Teorema energiei cinetice totale	75
4.5. Mișcarea centrului de masă	76
4.6. Mișcarea în jurul centrului de masă. Teoremele de descompunere.	78
4.7. Ciocniri	82
4.8. Masa variabilă	86
Probleme	88

CAP. 5. CINEMATICA SOLIDULUI RIGID

5.1. Translația și rotația	91
5.2. Produsul scalar și produsul vectorial	92
5.3. Deplasarea sistemului de coordonate.	93
5.4. Distribuția vitezelor	95
5.5. Mișcarea elicoidală	98
5.6. Distribuția accelerațiilor	99
5.7. Mișcarea plan-paralelă	100
Probleme	103

CAP. 6. DINAMICA SOLIDULUI RIGID

6.1. Energia cinetică de rotație	107
6.2. Momentul de inerție față de o axă	108
6.3. Lucrul mecanic. Puterea	109
6.4. Momentele de inerție față de un sistem de coordonate	110
6.5. Momentul cinetic de rotație	111
6.6. Variația momentului cinetic de rotație și variația energiei cinetice de rotație	114
6.7. Teoremele de descompunere	115
6.8. Axele principale de inerție	116
6.9. Teorema lui Steiner	117
6.10. Momentele de inerție. Exemple de calcul	118
6.11. Rotația în jurul axei fixe. Conservarea momentului cinetic	121
6.12. Pendulul de torsune	124
6.13. Pendulul fizic	124
6.14. Axele libere (spontane) și axele permanente de rotație	125
6.15. Giroscopul	128
6.16. Mișcarea plan-paralelă	131
Probleme	136

CAP. 7. STATICA SOLIDULUI RIGID

7.1. Statica punctului material	141
7.2. Deplasarea forței	141
7.3. Compunerea forțelor paralele	143
7.4. Compunerea cuplurilor	144
7.5. Reducerea unui sistem de forțe	146
7.6. Condițiile de echilibru	151
7.7. Reducerea „forțelor de inerție”	152
7.8. Teoremele lui Guldin și Pappus	153
Probleme	154

CAP. 8. GRAVITAȚIA

8.1. Legile lui Kepler	157
8.2. Legea atracției universale	158
8.3. Măsurarea constantei gravitaționale	160
8.4. Problema a două corpuri	161
8.5. Mișcarea în cimp central	163
8.6. Problema lui Kepler	166
8.7. Cimpul gravitațional și potențialul gravitațional	169
8.8. Fluxul cimpului gravitațional	172
8.9. Cimpul gravitațional al unei sfere omogene	174
8.10. Acclerația gravitațională	176
8.11. Sateliții artificiali	178
8.12. Masa inertă și masa grea. Principiul echivalenței	178
Probleme	182

CAP. 9. CINEMATICA MIȘCĂRILOR RELATIVĂ ȘI ABSOLUTĂ

9.1. Mișcările absolute, relative și de transport	185
9.2. Compunerea deplasărilor și a vitezelor	185
9.3. Compunerea accelerațiilor	188
9.4. Compunerea translațiilor și rotațiilor	192
Probleme	192

CAP. 10. DINAMICA MIȘCĂRILOR ABSOLUTĂ ȘI RELATIVĂ. SISTEME DE REFERINȚĂ NEINERȚIALE

10.1. Forțele complementare.	196
10.2. Verticala terestră (firul cu plumb)	201
10.3. Legea lui Bär	202
10.4. Căderea liberă	203
10.5. Pendulul Foucault	204
Probleme	207

CAP. 11. MECANICA RELATIVISTĂ

11.1. Postulatele teoriei relativității	210
11.2. Transformările lui Lorentz	211
11.3. Constrația lungimilor	213
11.4. Dilatarea duratei	213
11.5. Compunerea vitezelor	215
11.6. Spațiul Minkowski	216
11.7. Impulsul și masa	219

11.8. Forța	221
11.9. Energia	222
Probleme	223

CAP. 12. MECANICA SOLIDULUI ELASTIC

12.1. Tensiunile și deformările	226
12.2. Trațiunea (întinderea) barei	226
12.3. Întinderea (sau comprimarea) pe toate fețele	229
12.4. Forfecarea (sau lărgirea)	231
12.5. Încovoiera (flexiunea)	233
12.6. Torsiunea	238
12.7. Frecarea la rostogolire	240
Probleme	241

CAP. 13. MECANICA FLUIDELOR

13.1. Statica fluidelor	243
13.2. Ecuația de continuitate	247
13.3. Ecuația lui Bernoulli	250
13.4. Viscositatea	254
13.5. Formula lui Poiseuille	256
13.6. Legea lui Stokes	257
13.7. Efectul Magnus	258
13.8. Curgerea turbulentă	259
Probleme	262

CAP. 14. OSCILAȚII

14.1. Oscilatorul armonic	266
14.2. Reprezentarea complexă a oscilațiilor sinusoidale	271
14.3. Compunerea oscilațiilor armonice paralele	273
14.4. Compunerea oscilațiilor armonice perpendiculare	277
14.5. Oscilațiile amortizate	279
14.6. Oscilațiile forțate	283
14.7. Rezonanța	287
14.8. Oscilațiile sistemelor cu mai multe grade de libertate	292
14.9. Analiza armonică (Fourier)	295
Probleme	299

CAP. 15. UNDE ELASTICE

15.1. Unda plană progresivă neatenuată	306
15.2. Unda plană monocromatică	307
15.3. Deformația solidelor produsă de unde	309
15.4. Ecuația undelor în solide	312
15.5. Viteza undelor în solide	313
15.6. Densitatea și presiunea fluidului în unda sonoră	315
15.7. Viteza undelor în fluide	317
15.8. Viteza undelor în gaze	318
15.9. Densitatea de energie a unei	320
15.10. Fluxul de energie, Intensitatea sunetului	321
15.11. Analogia acustico—electrică	322

15.12. Undasterie	323
15.13. Interferența	323
15.14. Undele staționare	325
15.15. Principiul lui Huygens. Difracția undelor	327
15.16. Reflexia și refracția undelor	327
15.17. Efectul Doppler	330
15.18. Dispersia. Viteza de grup	331
15.19. Unde de suprafață	333
15.20. Absorbția undelor	334
Probleme	336

CAP. 16. SISTEME ACUSTICE

16.1. Coarda vibrantă	339
16.2. Tuburile sonore	341
16.3. Nivelul sonor	343
16.4. Analiza sunetelor	346
16.5. Ultrasunetele	347
Probleme	348

INTRODUCERE

Studiul fizicii începe obligatoriu cu studiul *mechanicii*, deoarece în cadrul mecanicii se învață noțiunile fundamentale: traiectorie, viteză, accelerație, forță, masă, lucru mecanic, energie, impuls, moment cinetic etc. și se stabilesc legi fundamentale: principiile mecanicii, teoremele impulsului, momentului cinetic, energiei cinetice, conservării energiei mecanice etc., noțiuni și legi folosite în toate capitolele fizicii.

Să facem câteva observații generale asupra fizicii, apoi asupra *mechanicii*.
1. Fizica — știință a naturii. *Fizica* (physis = natură, în limba greacă) studiază cele mai generale și mai simple forme de mișcare a materiei (mecanice, termice, electromagnetice etc.).

Prin *materie* se înțelege realitatea obiectivă care există în mod independent de conștiința umană și este reflectată adecvat de aceasta.

Atributul fundamental al materiei, modul său de existență, este mișcarea. Prin *mișcare* se înțelege orice schimbare sau proces: deplasare mecanică în spațiu, reacție chimică, radiație electromagnetică, proces biologic, gândire.

Formele fizice de mișcare a materiei participă todeauna și la formele superioare, mai complexe, de mișcare (biologice, sociale etc.), fără a epuiza însă esența lor calitativă. Astfel legea conservării energiei se aplică tuturor proceselor: chimice, biologice etc.; legea atracției universale se aplică tuturor corpurilor: simple sau complexe, vii sau moarte ș.a.m.d.
Scopul fizicii este descrierea, explicarea și prevederea fenomenelor naturii, pentru a le putea stăpâni și folosi.

Dezvoltarea fizicii a fost stimulată de *necesitățile practice* ale oamenilor. La rândul lor descoperirile și realizările fizicii stau la baza dezvoltării *tehnicii*; metodele de cercetare fizice și aparatura creată de fizicieni se aplică și în celelalte științe ale naturii (de exemplu, în chimie, biologie).

Fizica stabilește legi pe baza observațiilor și a experimentului științific. *Legea* exprimă legătura necesară și esențială între fenomene, legătura dintre cauză și efect, care condiționează o dezvoltare determinată a fenomenelor.
Observația este studiul fenomenului în condițiile sale naturale de desfășurare, în timp ce *experimentul* științific este reproducerea fenomenului în diverse condiții create artificial, cu scopul de a descoperi legăturile fenomenului.

Legile fizicii pot fi stabilite (descoperite și formulate) numai într-o anumită etapă sau grad de dezvoltare a practicii social-istorice, a științelor, a tehnicii și de obicei în urma unor neamănitate și îndelungate cercetări. După milenii de dezvoltare istorică a civilizației au putut fi stabilite, de exemplu, legile mișcării planetelor (J. Kepler 1609, 1619), legea inerției (Galilei 1632), legile mecanicii (I. Newton 1687), legea atracției universale (I. Newton 1687), legile mecanicii relativiste (A. Einstein 1905), legile mecanicii cuantice (1925) etc.

Descrierea și explicarea fenomenelor trebuie să fie *cantitativă* — condiție fundamentală a științelor exacte — de aceea *matematica* este un instrument indispensabil al fizicii. Dar cantitatea se determină numai prin măsurări, de aceea *măsurarea* este un proces fundamental în fizică.

În proprietățile materiei se evidențiază ideea *dezvoltării* și *interconexiunii*, precum și *principiul cauzalității* — bază a prevederii desfășurării fenomenelor.

Dezvoltarea fizicii duce inevitabil la concepția *materialist-dialectică* asupra lumii, anume că aceasta este prin natura sa *materială*. Materia, necreată și indestructibilă, este unicul izvor a tot ce există. Conștiința este un produs al dezvoltării istorice a materiei. Conștiința poate reflecta *adevărat* materia, ca atare lumea poate fi *cunoscută*. În acest sens, activitatea practică a oamenilor este hotărâtoare.

2. Teoria și practica. Domeniul fenomenelor studiate de fizică s-a lărgit odată cu dezvoltarea practicii social-istorice a omenirii. Însuși obiectul și metodele fizicii au evoluat. De exemplu, în secolul 18 a predominat mecanica, în secolul trecut — electromagnetismul, în secolul nostru — fizica atomică etc.

Practica apare în triplu rol: de izvor al cunoștințelor noastre, de criteriu al adevărului și de scop al cunoașterii.

Cercetarea științifică reprezintă o unitate dintre teorie și practică, în care rolul practicii este hotărâtor, iar rolul teoriei conducător.

Teoria explică un ansamblu de fenomene folosind un număr mic de ipoteze sau legi fundamentale, numite de obicei *principii*, care sînt abstrase din experiență. Din acest sistem de legi fundamentale sînt deduse teoretic toate legile cunoscute sau încă necunoscute, care privesc domeniul respectiv. Orice teorie trebuie neapărat verificată în practică.

Noțiunile și mărimile fizice nu sînt creații subiective arbitrare, ci reflectă realitatea obiectivă, tot mai precis și mai deplin odată cu dezvoltarea fizicii (de exemplu, noțiunile: atom, electron, foton, cîmp etc. sau mărimile: energie cinetică, impuls, lucru mecanic, energie potențială etc.).

Ceea ce am spus despre legile fizicii este valabil și pentru noțiunile și mărimile fizice. Ele se obțin în urma strădănilor mai multor savanți și chiar generații de savanți. De exemplu, mărimile *impuls* (cantitate de mișcare) și *energie cinetică* („forță vie” mv^2) au fost introduse de R. Descartes (1644). respectiv G. Leibniz (1686) în urma a nenumărate cercetări și dispute științifice asupra măsurii mișcării mecanice. Caracterul vectorial al impulsului a fost descoperit de elevii lui Descartes, iar coeficientul $1/2$ din expresia energiei cinetice (denumire propusă după 1830) a fost introdus de G. Coriolis (la începutul secolului trecut). Abia teoria relativității (1905) a unificat impulsul și energia totală într-un cuadvector — măsură spațio-temporală a mișcării, legată de omogenitatea spațiului și timpului. Alți exemplu; noțiunea de foton a apărut (1905), după cîteva secole de dezvoltare a opticii (teoria corpusculară a luminii — Newton, teoria ondulatorie — Huygens, Fresnel).

Teoriile fizice actuale nu trebuie absolutizate și eternizate. Ele suferă o dezvoltare *treptată cantitativă* ducînd la un moment dat la crearea *prin salt* a unor teorii *calitative noi*, care reflectă mai bine realitatea obiectivă, conțin ca un caz particular sau caz limită teoriile precedente și arată totodată domeniul lor de valabilitate (*principiul de corespondență*). Astfel avem succesiv: mecanica clasică, teoria restrînsă a relativității, teoria generală a relativității, mecanica cuantică, teoria cîmpurilor și practicile elementare.

3. Schematizarea; modele. Materia este infinită și nepuizabilă în proprietățile sale, în formele sale de organizare și manifestare. Obiectele și fenomenele din natură se găsesc în nesfîrșite interconexiuni și interdependențe. De aceea, în studiul fenomenelor naturii sîntem totdeauna nevoiți să simplificăm, să „schematizăm” procesele studiate, să creem „modele” teoretice ale obiectelor și fenomenelor. Fără schematizarea fenomenelor studiate fizica n-ar putea folosi aparatul matematic, n-ar avea o teorie, n-ar putea conferi experienței un scop determinat, adică ar fi total neputincioasă.

Un model corect trebuie să ia în considerare particularitățile *principale* ale fenomenului (obiectului, procesului) studiat în *problema pusă*, lăsînd la o parte trăsăturile secundare, neesențiale, necaracteristice. Numai astfel se pot stabili legile și relațiile cantitative. Artă fizicianului este de a ști ce să păstreze și ce să *neglijeze* în problema propusă.

Odată cu dezvoltarea fizicii, modelele sau schemele sînt perfecționate cantitativ și chiar schimbate calitativ, pentru a putea exprima mai fidel realitatea obiectivă. Exemple de schematizări și modele: punctul material, solidul rigid, gazul perfect (ideal), gazul Van der Waals, lichidul ideal, atomul lui Bohr, atomul din mecanica cuantică etc.

4. Unități de măsură. Măsurarea este procesul fundamental în fizică. A măsura o mărime înseamnă a stabili de cîte ori se cuprinde în ea o altă mărime de aceeași natură, bine definită și aleasă prin convenție drept unitate.

Notăm cu $[A]$ unitatea de măsură pentru mărimea fizică A și cu a valoarea sa numerică, măsurată, atunci:

$$a \stackrel{\text{def}}{=} A/[A], \quad A = a[A]. \quad (1)$$

Dacă unitatea $[A]$ se mărește de n ori, valoarea măsurată a se micșorează de n ori.

Orice măsurare fizică este întotdeauna un *proces de interacțiune* între obiectul măsurat și dispozitivul de măsură, proces care *modifică și starea obiectului măsurat*.

Nici o măsurare fizică nu este perfectă; orice măsurare fizică implică totdeauna *erori de măsurare* mai mari sau mai mici. Odată cu dezvoltarea științei și tehnicii se perfecționează și tehnica măsurărilor. Astăzi în multe domenii (de exemplu, în optică) s-a atins o precizie de măsurare extrem de înaltă.

În principiu, pentru fiecare mărime fizică se poate alege o unitate proprie arbitrară, dar atunci legile fizicii s-ar exprima prin formule care ar conține coeficienți numerici *paraziți*, dependenți de unitățile folosite. De aceea, ținînd seama de relațiile care există între diferite mărimi fizice, se alege totdeauna un număr *mic* de mărimi, numite *fundamentale*, și pe baza acestora se construiește un *sistem coerent* de unități, astfel încît în cele mai frecvente și importante formule fizice să dispară coeficienții paraziți. Celelalte mărimi și unități, legate de cele fundamentale prin legi ale fizicii, se numesc mărimi și unități *derivate*.

Nu există vreo lege a naturii care să ne impună alegerea anumitor mărimi drept mărimi fundamentale sau să ne indice numărul acestora. De aceea, în principiu, s-ar putea alege o *singură* unitate arbitrară pentru o singură mărime considerată fundamentală, toate celelalte fiind astfel derivate,

(cu ajutorul constantelor fizice *universale* se poate construi un sistem „absolut” sau „intrinsec” de unități bine determinate, în care *toate* mărimile fizice sînt adimensionale).

În practică se aleg totdeauna cel puțin trei unități fundamentale. Întrucît materia există și se mișcă în spațiu și timp, care sînt formele sale de existență, se aleg în primul rînd *lungimea* și *durata* ca mărimi fundamentale. La aceste caracteristici externe ale materiei se adaugă cel puțin o mărime caracteristică internă a materiei, cum este *masa* sau *sarcina electrică* (curentul electric).

În sistemul CGS (Gauss) se aleg trei unități fundamentale: centimetrul (C), gramul (G) și secunda (S). În sistemul internațional SI (adoptat de Conferința Generală de Măsuri și Greutăți, Paris, octombrie 1960) se aleg șase unități fundamentale, dintre care numai primele trei (metrul, kilogramul și secunda) intervin în mecanică.

Metrul a fost definit inițial (1795) ca $1/10^7$ din sfertul meridianului care trece prin Paris și pe baza măsurătorilor de atunci (1792) a fost construit un etalon (din platină-iridiu). Ulterior s-a definit metrul ca distanța (la 0°C) dintre cele două trăsături (repere) de pe etalonul păstrat la Biroul Internațional de Măsuri și Greutăți de la Sèvres (îngă Paris). Începînd din 1961 metrul este definit pe baza lungimii de undă λ_K în vid a radiației portocalii a izotopului kripton 86 (tranziția între nivelele $2p_{10}$ și $5d_5$):

$$1\text{ m} \stackrel{\text{def}}{=} 1\,650\,763,73\, \lambda_{K_2} \quad (2)$$

Secunda a fost definită inițial ca $1/86400$ din ziua solară medie. Cum rotația diurnă a Pământului nu este uniformă (oscilații de $\approx 10^{-5}\%$), ulterior (1956) s-a definit secunda astfel:

$$1\text{ s} \stackrel{\text{def}}{=} 1/31\,556\,925,9747 \text{ din anul tropic la } 1.1.1900. \quad (3)$$

Anul tropic este intervalul de timp dintre două treceri succesive ale Soarelui (în mișcarea sa vizibilă pe ecliptică), prin punctul corespunzător echinocțiului de primăvară (punctul vernal). Anul tropic scade cu $\approx 0,5$ s pe secol; de aceea s-a precizat anul 1900.

Începînd din 1964 secunda este definită pe baza perioadei T_{Cs} a unei anumite radiații emise de atomii de cesiu (Cs^{133} ; tranziția hiperfină $4,0 \rightarrow 3,0$ a stării fundamentale $^2S_{1/2}$):

$$1\text{ s} \stackrel{\text{def}}{=} 9\,192\,631\,770\, T_{Cs} \quad (4)$$

Kilogramul a fost definit inițial ca masa unui decimetru cub de apă pură la 4°C (cînd are densitate maximă) și pe această bază a fost construit un etalon (tot din platină-iridiu), păstrat la Sèvres. Ulterior s-a luat masa acestui etalon drept definiție a kilogramului. După măsurătorile actuale, 1 dm³ de apă distilată la 4°C are masa:

$$m \text{ (1 dm}^3 \text{ apă la } 4^\circ\text{C)} = 0,999\,972\, \text{ kg} \quad (5)$$

și deci 1 kg de apă la 4°C are volumul:

$$V \text{ (1 kg apă la } 4^\circ\text{C)} = 1,000\,028 \text{ dm}^3 \stackrel{\text{def}}{=} 11 \quad (6)$$

(definiția litrului).

5. Formule dimensionale. Dacă notăm cu L, M, T unitățile mărimilor fundamentale lungime, masă și timp, atunci pentru oricare unitate *meccanică* avem ecuația

$$[A] = L^x M^y T^z, \quad (7)$$

numită *ecuație de dimensiuni* sau *formulă dimensională* a mărimii A față de mărimile fundamentale alese. Exponenții x, y, z sînt numere întregi pentru mărimi mecanice (pot fi fracționare în sistemul CGS pentru mărimi nemecanice).

Constantele care intervin în legile fizicii pot fi atât dimensionale, cît și adimensionale (în ultimul caz nu intervin în formula dimensională).

Deoarece nu se pot aduna sau egala decît mărimi fizice de *aceeași natură*, fiecare formulă fizică trebuie să fie *omogenă* din punct de vedere *dimensional*, adică ambii membri ai egalității, cît și fiecare termen al unei sume algebrice, trebuie să aibă *aceleași dimensiuni fizice*, altfel formula n-are sens. Acesta este *principiul omogenității dimensionale a formulelor fizice*.

Observăm că o aceeași mărime fizică poate avea dimensiuni diferite în sisteme de unități diferite și două mărimi de naturi diferite pot avea într-un sistem dat aceleași dimensiuni (de exemplu, lucrul mecanic și momentul forței în SI).

Exemple. a) Pentru definirea unității de viteză folosim legea mișcării rectilinii *uniforme* $\Delta x/\Delta t = \text{const}$. Cu o unitate arbitrară pentru viteză, ecuația mișcării se scrie $x = kv$, unde k este un coeficient numeric parazit. De exemplu, dacă $[v] = \text{viteza sunetului în aer la } 0^\circ\text{C}$, $L = 1\text{ m}$, $T = 1\text{ s}$, atunci $k = 331$.

Într-un sistem *corect* de unități punem $k = 1$, atunci

$$v = \frac{x}{t}, \quad [v] = [x]/[t] = \frac{L}{T} = L \cdot T^{-1}, \quad (8)$$

de unde

$$[v] = 1\text{ m/s în SI sau } [v] = 1\text{ cm/s în CGS.} \quad (8')$$

Unitatea de viteză este egală cu viteza unui mobil care se deplasează rectiliniu uniform, parcurgînd unitatea de lungime (1 m) în unitatea de timp (1 s).

b) Pentru definirea unității de *acclerație* folosim legea mișcării rectilinii *uniforme acclerate*, scrisă fără coeficient parazit:

$$a = \frac{v - v_0}{t}, \quad [a] = [v]/[t] = \frac{L T^{-1}}{T} = L T^{-2}, \quad (9)$$

$$[a] = 1\text{ m/s}^2 \text{ în SI sau } [a] = 1\text{ cm/s}^2 \text{ în CGS.} \quad (9')$$

Unitatea de acclerație este egală cu acclerația unui mobil care se deplasează rectiliniu uniform acclerat și a cărui viteză crește cu o unitate (1 m/s) într-un timp egal cu unitatea (1 s).

2) *Analiza dimensională* ne permite să găsim chiar forma unor legi fizice. De exemplu, știind din experiențe că *perioada unui pendul simplu* depinde de lungimea sa l și de accelerația gravitațională g , scriem

$$T = \text{const. } l^\alpha g^\beta, \quad (10)$$

unde α și β sînt constante. Trezind la dimensiuni:

$$T = L^\alpha (L T^{-2})^\beta = L^{\alpha+2\beta} T^{-2\beta}, \quad (11)$$

prin identificarea exponenților, găsim

$$0 = \alpha + \beta, \quad 1 = -2\beta, \quad \text{de unde } \alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = -\frac{1}{2}, \quad (12)$$

deci perioada pendulului simplu:

$$T = \text{const. } \sqrt{l/g}. \quad (13)$$

unde const este o constantă adimensională de ordinul unității (știm că este 2π). Vom întâlni și alte exemple de aplicare a analizei dimensionale.

Pentru *multipli* și *submultipli* ai diferitelor unități se folosesc următoarele prefixe:

Multipli	unități	Submultipli	unități
deca-	da-	10	10 ⁻¹
hecto-	h-	10 ²	10 ⁻²
kilo-	k-	10 ³	10 ⁻³
mega-	M-	10 ⁶	10 ⁻⁶
giga-	G-	10 ⁹	10 ⁻⁹
tera-	T-	10 ¹²	10 ⁻¹²
peta-	P-	10 ¹⁵	10 ⁻¹⁵
exa-	E-	10 ¹⁸	10 ⁻¹⁸

Se recomandă a nu se folosi simultan două prefixe la aceeași unitate și a nu se folosi prefixe la numitor.

În afara unităților SI și CGS se folosesc pe larg cîteva unități tolerate, ca de exemplu, kilogram-forța (kgf), cal-putere (CP), torrul (sau mm Hg), pe care le vom defini mai târziu.

6. Obiectul mecanicii. Mecanica studiază mișcarea cea mai simplă a corpurilor solide, lichide și gazease, anume *deplasarea lor în spațiu și timp*, precum și cauzele care o produc.

Cinematica studiază mișcarea în spațiu și timp, abstracție făcînd de cauzele mișcării. *Dinamica* studiază mișcarea corpurilor ținînd seama de forțele care o produc. *Statica* studiază echilibrul corpurilor sub acțiunea forțelor.

Mecanica este capitolul de bază al fizicii. Noțiunile și legile mecanicii, — forță, lucru mecanic, putere, energie cinetică, legea fundamentală $\vec{F} = m\vec{a}$, principiul reciprocității forțelor etc. — se aplică în toate celelalte capitole ale fizicii. Mecanica este cea dintîi aplicație a matematicii la studiul cantitativ și causal al fenomenelor naturii.

7. Observații istorice. Cunoștințele de mecanică existau încă în antichitate, mai ales în problemele de statică. Astfel, *Arhimede* (287—212 î.e.n.) a conceput teoria pirgheii, teoria centrului de greutate (≈ 250 î.e.n.), a pus bazele hidrostaticii, a făcut numeroase invenții tehnice.

Dezvoltarea intensă a mecanicii începe în epoca Renasterii. *Leonardo da Vinci* (1452—1519) dă o teorie a mecanismelor, studiază legile frecării, teoria planului înclinat, definește și aplică momentul forței etc. *Christiaan Huygens* (1629—1695) descoperă pendulul fizic, introduce noțiunile de forță centrifugă, moment de inerție, centru de oscilație. Pune bazele teoriei ondulatorii în „Tratatul despre lumină”.

Inițiatorul dinamicii este *Galileo Galilei* (1564—1642) care a descoperit legea inerției, legile căderii corpurilor, legile pendulului etc. Legile dinamicii și construcția mecanicii teoretice au fost date de *Isaac Newton* (1643—1727) în celebra sa carte „*Philosophiæ naturalis Principia mathematica*” (1687). Tot aici se formulează legea atracției universale și se aplică la mecanica cerească.

Mecanica a fost dezvoltată mai departe de *Leonard Euler* (1707—1783), *Jean d'Alembert* (1717—1783), *Joseph Lagrange* (1736—1813), *William Hamilton* (1805—1865) și alții. Stabilitatea sistemelor dinamice a fost studiată de *H. Poincaré* (1854—1912) și *A. M. Liapunov* (1857—1918). Dinamica corpului cu masă variabilă a fost elaborată de *I. V. Meșcerski* (1859—1935) și *T. Levi-Civita* (1873—1941).

La noi în țară contribuții valoroase în mecanica teoretică și aplicată au adus Anghel Saligru, Spiru Haret, Andrei Ioachimescu, Ion Ionescu, Gh. Em. Filipescu, V. Vălcovici, O. Onicescu și alții.

8. Limitele mecanicii. Concepțiile mecanicii newtoniene au exercitat o puternică și îndelungată influență asupra întregii fizici. Astfel s-a născut concepția *meccanicistă* asupra lumii, după care toate științele naturii trebuie reduse la mecanică, toate fenomenele naturii explicate prin mișcări mecanice, legile naturii reduse la legi mecanice. Această concepție a fost infirmată la sfîrșitul secolului trecut odată cu imposibilitatea reducerii fenomenelor electromagnetice la mișcări mecanice. S-a încercat atunci crearea unui tablou „electromagnetic” al lumii, adică explicarea tuturor fenomenelor prin cele electromagnetice. Dar nici această explicație nu este posibilă, deoarece forțele nucleare, de exemplu, nu pot fi reduse la forțe electromagnetice. Materia fiind infinită și inepuizabilă, nici o teorie dată nu poate fi universală și ultimă (definitivă).

Domeniul de valabilitate al mecanicii clasice newtoniene este restrîns la corpurile de dimensiuni obișnuite sau mari (macroscopice) și la viteze mici în comparație cu viteza luminii în vid ($c = 3 \cdot 10^8$ m/s). Pentru viteze foarte mari, apropiate de viteza luminii, a fost creată (1905) *meccanica relativistă* (Albert Einstein 1879—1955). Pentru particule de dimensiuni atomice a fost creată (1925) *meccanica cuantică* (E. Schrödinger, W. Heisenberg, L. De Broglie, P.A.M. Dirac și alții).

Teoria gravitației a lui Newton a fost depășită de teoria generală a relativității a lui A. Einstein (1916).

Teoriile de mai sus sînt *calitativ* deosebite de mecanica newtoniană, pe care o conțin însă ca un caz particular sau ca un caz limită.

PROBLEME

1. Să se scrie ecuația mișcării rectilinii uniform variate, dacă unitatea de viteză $[v]$ este egală cu viteza sunetului în aer în condiții normale, iar unitatea de accelerație $[a]$ este egală cu accelerația standard (normală) a căderii libere.

R.
$$x = x_0 + 331 v_0 t + 4,90 at^2.$$

2. Știind că presiunea exercitată de o coloană (pătură) de fluid depinde de înălțimea (grosimea) sa h , de densitatea fluidului ρ și de accelerația gravitațională g să se găsească formula presiunii hidrostatice, folosind analiza dimensională.

R.
$$p = \text{const.} \cdot \rho g h.$$

CAPITOLUL I

CINEMATICA PUNCTULUI MATERIAL

1.1. RELATIVITATEA MIȘCĂRII SISTEMELE DE REFERINȚĂ

Deplasarea unui corp are loc în raport cu *alte* corpuri. Fără aceste alte corpuri nu se poate vorbi de deplasare, care este totdeauna *relativă*. O deplasare absolută fără raportare la alte corpuri este lipsită de sens. Relativitatea mișcării este legată de relativitatea poziției sau a spațiului. Nu se poate vorbi de poziție într-un spațiu absolut, independent de corpurile aflate în el, ci numai de poziție *față de alte corpuri*.

Corpul care se consideră *prin convenție* fix și față de care se studiază deplasarea altor corpuri, se numește *corp de referință*, de exemplu, Pământul sau Soarele. De corpul de referință este legat rigid un *sistem de coordonate* (prescurtat SC), de exemplu, un sistem cartezian ortogonal de 3 axe. Pentru măsurarea timpului trebuie ales un proces periodic, de exemplu oscilațiile unui pendul. Sistemul de coordonate pentru măsurarea poziției și ceasornicul pentru măsurarea timpului constituie un *sistem de referință* sau reper (prescurtat SR).

Mișcarea unui corp arată în general diferit în SR diferite. De exemplu, în SC *propriu*, adică în SC legat rigid de corp, acesta este în repaus (SC propriu prezintă interes, de exemplu, în teoria relativității pentru timpul propriu, lungime de repaus, masa de repaus etc.).

În principiu, orice SR este admisibil pentru descrierea mișcării unui corp. Practic însă, se alege totdeauna un SR astfel, încât fenomenul studiat să arate cât mai *simplic* (așa cum de exemplu, în geometria analitică, în diferite probleme de intersecții, locuri geometrice, proprietăți ale figurilor, se aleg axele de coordonate cât mai convenabile). Vom vedea că din punct de vedere *dinamic*, se evidențiază o clasă foarte importantă de SR, numite *inerțiale*.

1.2. PUNCT MATERIAL. MOBIL

Un corp material este un sistem extrem de complex. O prînă simplificată este neglijarea deformării corpului, adică considerarea corpului *rigid* (distanțele mutuale dintre părțile corpului presupuse fixe). Dar chiar și așa mișcarea este complexă. De aceea se studiază mai întâi mișcarea unui corp

ale cărui dimensiuni și rotații proprii sunt neglijabile în problema dată. Acesta este *punctul material*, caracterizat numai prin masa sa. În cinematică masa nu interesează, de aceea punctul material devine un *mobîl*, adică un punct geometric care se mișcă. Un corp oarecare poate fi considerat acum ca un sistem de puncte materiale.

Un punct material poate fi un electron, o moleculă, o piatră, un corp cosmic etc. Un același corp poate fi considerat punct material într-o problemă și nu într-o altă problemă. De exemplu, globul terestru se poate aproxima cu un punct material în mișcarea sa de revoluție în jurul Soarelui, dar nu în rotația proprie diurnă.

În mișcarea de *translație*, toate punctele corpului se mișcă identic, de aceea mișcarea unui singur punct al corpului caracterizează pe deplin mișcarea întregului corp, indiferent de dimensiunile acestuia, deci putem aplica modelul punctului material.

1.3. TRAIECTORIA. ECUAȚIILE MIȘCĂRII

Se numește *traiectorie* linia sau curba descrisă de mobil în timpul mișcării sale, adică locul geometric al punctelor prin care trece mobilul.

Traiectoria poate fi rectilinie sau curbilinie (în particular, circulară).

Forma traiectoriei depinde de SC folosit.

Poziția mobilului la un moment dat t este determinată de coordonatele sale, de exemplu, x, y, z într-un SC ortogonal (fig. 1.1) sau altfel, de

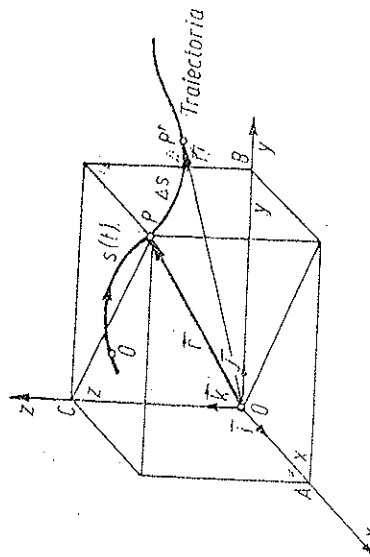


Fig. 1.1

vectorul de poziție \vec{r} , ale cărui proiecții (componente) pe axele $Oxyz$ sînt tocmai coordonatele x, y, z :

$$\begin{aligned} \vec{r} &= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2; \\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} &\text{ — versorii axelor, } |\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1. \end{aligned} \quad (1.1)$$

În fig. 1.1. $\vec{r} = \vec{OP}$ este diagonala spațială a paralelipedului, punctul P se proiectează ortogonal pe axe după diagonalele fețelor în punctele A, B, C .

Conform principiului *perfectei localizări*, se presupune că punctul material descrie o traiectorie continuă bine determinată, că în fiecare moment ocupă pe traiectorie o poziție bine determinată și că această poziție variază în timp în mod *continuu*. Aceasta înseamnă că coordonatele punctului material x, y, z sînt funcții finite, uniforme și continue de timp:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t), \quad (1.2)$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k} = \vec{r}(t). \quad (1.2')$$

Mai mult, vom presupune că funcțiile (1.2) sînt de două ori derivabile, ceea ce este în general adevărat (eventualele singularități, de exemplu, în teoria ciocnirilor, trebuie analizate special).

Cele trei ecuații (1.2) se numesc *ecuațiile cinematice ale mișcării* și reprezintă ecuațiile parametrice ale traiectoriei, în care parametrul este timpul. Prin eliminarea timpului din (1.2) se obțin ecuațiile traiectoriei sub forma:

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0. \quad (1.3)$$

Fiecare ecuație de aici reprezintă o suprafață, iar ansamblul lor reprezintă curba de intersecție a celor două suprafețe.

Mișcarea poate fi descrisă de asemenea cu ajutorul traiectoriei (1.3) și a legii de mișcare pe această traiectorie (deci tot 3 ecuații):

$$s = f(t), \quad (1.3')$$

unde s este *coordanata curbilinie* a mobilului, adică lungimea arcului de traiectorie măsurată de la un punct origine O de pe traiectorie, ținînd seama de sensul pozitiv ales pe curbă. Presupunem funcția (1.3') de două ori derivabilă.

1.4. VITEZA PE TRAIECTORIE

Fie P și P' pozițiile mobilului în momentele t și t' . Dacă s, s' sînt coordonatele curbilinie ale punctelor P, P' , atunci $\Delta s = s' - s = \text{arc } PP'$ reprezintă *deplasarea curbilinie* a mobilului în intervalul de timp $\Delta t = t' - t$. Deplasarea curbilinie Δs poate fi pozitivă sau negativă și ea nu coincide în general cu distanța parcursă de mobil în intervalul Δt (de exemplu, dacă în timpul Δt mobilul revine în P , rezultă $\Delta s = 0$, în timp ce distanța parcursă este diferită de zero).

Viteza medie pe o porțiune de traiectorie PP' de lungime Δs , parcursă în intervalul de timp Δt , se definește prin raportul

$$\bar{v} = \Delta s / \Delta t. \quad (1.4)$$

Viteza *instantanee* sau momentană în punctul P la momentul t se obține trecând la limita $P' \rightarrow P$:

$$\vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = s'(t) = \dot{s}; \quad (1.5)$$

adică se obține prin derivarea coordonatei curbilini s în raport cu timpul. Dacă $v > 0$, mobilul se mișcă în sensul ales pozitiv pe traiectorie. Derivata (1.5) există în virtutea ipotezei derivabilității lui (1.3').

Exemplu. Dacă pe o traiectorie oarcare se parcurg distanțe egale în timpuri egale, mișcarea se numește *uniformă pe traiectorie* sau *curbiline uniformă* (de exemplu, circulară uniformă). În acest caz deplasarea curbilinie Δs coincide cu distanța parcursă și viteza pe traiectorie este constantă:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \text{const} = v = \frac{ds}{dt}, \quad \int ds = \int v dt, \quad s(t) = s_0 + vt, \quad (1.6)$$

unde $s_0 = s(0)$ este coordonata inițială (la $t = 0$) (fig. 1.2). Mai general, integrarea din (1.6) dă

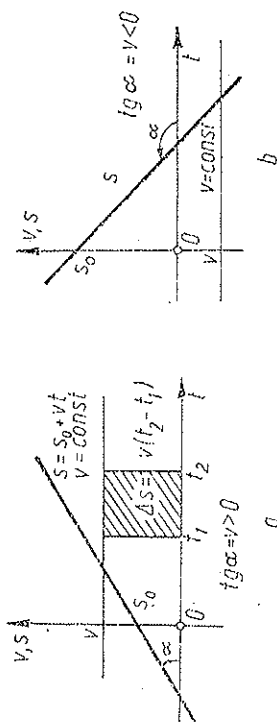
$$s = s_0 + v(t - t_0), \quad (1.6')$$


Fig. 1.2

unde s_0 este coordonata la momentul t_0 . Prin urmare, coordonata s este o funcție *lineară* de timp și se reprezintă grafic printr-o linie dreaptă. Panta dreptei reprezintă viteza.

Viteza medie $\bar{v} = \Delta s / \Delta t$, definită mai înainte, coincide cu viteza constantă a unui mobil fictiv care ar parcurge *uniform* aceeași deplasare Δs în același interval de timp Δt .

1.5. VECTORUL VITEZĂ

Cunoașterea mișcării pe traiectorie implică cunoașterea direcției și sensului mișcării mobilului. Direcția este dată de tangenta la traiectorie, iar sensul este dat de creșterea sau descreșterea arcului s când timpul t crește (fig. 1.3).

Vectorul deplasare este *prin definiție* $\Delta \vec{r} = \vec{r}' - \vec{r}$ și coincide cu *direcția și lungimea cu secanta PP'* .

Vectorul *viteză medie* $\bar{\vec{v}}$ se definește prin raportul:

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (1.7)$$

și are direcția vectorului deplasare, adică a secantei \vec{PP}' .

La limita $P' \rightarrow P (\Delta t \rightarrow 0)$ obținem vectorul vitezei *instantanee* sau momentană:

$$\vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}'(t) = \dot{\vec{r}}. \quad (1.8)$$

Vectorul vitezei este derivata vectorului de poziție în raport cu timpul.

Când trecem la limită, secanta PP' se rotește în jurul lui P și devine tangentă la traiectorie, prin urmare vectorul vitezei momentană \vec{v} are direcția tangentei la traiectorie (este tangent la traiectorie) (G. Roberval 1635).

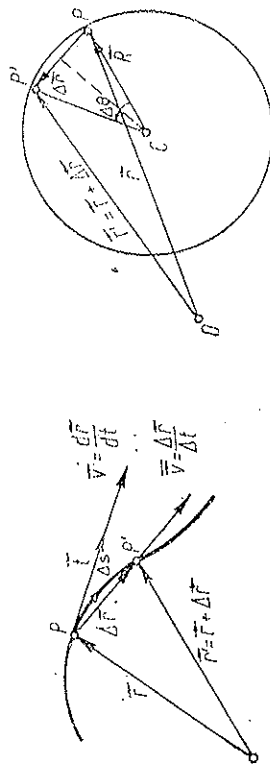


Fig. 1.3

Deoarece la limită lungimea arcului de curbă ds coincide cu lungimea coardei subținse $|\Delta \vec{r}|$, de exemplu, la cerc de rază R (fig. 1.4):

$$\left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| = \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta s} = \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \frac{2R \sin(\Delta \theta / 2)}{R \Delta \theta} = \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta \theta / 2)}{\Delta \theta / 2} = 1,$$

unde $\Delta \theta$ este unghiul la centru (în radiani) al coardei de lungime $2R \sin(\Delta \theta / 2)$ care subține arcul de lungime $R \Delta \theta$, rezultă că derivata $d\vec{r}/ds$, având modulul 1, trebuie să fie un versor, și anume în direcția tangentei la curbă și în sensul creșterii coordonatei s :

$$\left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| = 1, \quad \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{t}, \quad |\vec{t}| = 1, \quad (1.9)$$

unde \vec{t} este versorul tangentei (în sensul creșterii arcului s) (a nu se confunda versorul tangentei \vec{t} cu timpul t). Prin urmare,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \vec{t} \frac{ds}{dt} = v \vec{t}, \quad (1.10)$$

vectorul vitezei este tangent la traiectorie și îndreptat în sensul mișcării.

Observație. De obicei notăm modulul unui vector cu literă fără săgeată: $|\vec{a}| = a$. În (1.10) însă, $v = \dot{s} = ds/dt$ nu înseamnă modulul $|\vec{v}|$, ci $|\vec{v}| = v$ (după sensul mișcării), și anume, viteza pe traiectorie s este componenta vectorului vitezei \vec{v} pe direcția tangentei la traiectorie \vec{t} :

$$\vec{v} = v \vec{t}, \quad \text{unde } v = \dot{s} = ds/dt = |\dot{\vec{r}}|. \quad (1.11)$$

În general, din context se înțelege, dacă v este modulul vitezei sau componenta vectorului vitezei \vec{v} pe direcția tangentei la traiectorie (viteza pe traiectorie).

1.6. ACCELEERAȚIA

Într-o mișcare curbilinie oarecare viteza \vec{v} variază și ca mărime și ca direcție. O măsură a acestei variații este *vectorul accelerație*. Analog vectorului vitează, definim accelerațiile medii și instantanee (momentană):

$$\bar{\vec{a}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}, \quad \vec{a} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}'(t) = \dot{\vec{v}}, \quad (1.17)$$

$$\bar{\vec{a}} = \frac{d}{dt} \vec{v} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{r}''(t) = \ddot{\vec{r}}, \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} a_x &= \dot{v}_x = \ddot{x} = f'_1(t), \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} = f'_2(t), \quad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z} = f'_3(t); \\ a^2 &= a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2 = f'^2_1 + f'^2_2 + f'^2_3, \end{aligned} \quad (1.19)$$

adică *accelerația \vec{a} este derivata întâia a vitezei \vec{v} sau derivata a doua a vectorului de poziție \vec{r} , în raport cu timpul t* . Componentele accelerației sînt egale cu derivatele componentelor respective ale vitezei, în raport cu timpul, sau cu derivatele de ordinul II ale coordonatelor respective (într-un SC cartezian ortogonal).

În timp ce viteza este totdeauna tangentă la traiectorie și are sensul mișcării, *accelerația în mișcarea curbilinie este totdeauna orientată spre „interiorul” traiectoriei, adică spre partea concavă a traiectoriei*, partea spre care se rotește vectorul vitezei tangent la traiectorie (fig. 1.6).

Ducînd vectorul vitează \vec{v} dintr-un punct fix O , virful său Q va descrie în timpul mișcării mobilului o curbă numită *hodograf* (W. Hamilton 1846) (fig. 1.7). Accelerația medie are direcția secantei \overline{OQ} la hodograf, în timp

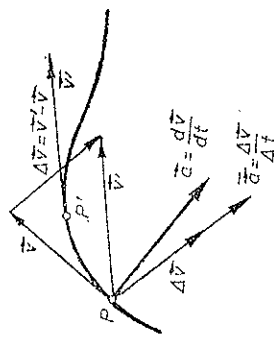


Fig. 1.6

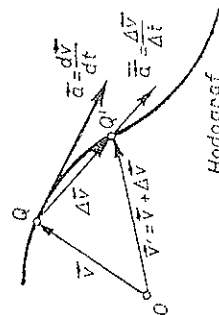


Fig. 1.7

ce accelerația momentană este tangentă la hodograf. Viteza de deplasare a punctului reprezentativ Q pe hodograful vitezei coincide cu accelerația mobilului (traiectoria mobilului este „hodograful” vectorului de poziție \vec{r}).

Observație. Conform formulelor (1.2), (1.12–13) și (1.19) mișcarea unui punct material în spațiu se descompune în 3 mișcări rectilinii ale proiecțiilor sale pe cele 3 axe ortogonale de coordonate (Maciariu 1742). În fiecare moment viteza și accelerația mobilului se compun (vectorial) din vitezele și accelerațiile acestor proiecții (H. Resal 1862).

Viteza și accelerația există, funcțiile (1.2) fiind presupuse de două ori derivabile.

Pentru componentele vitezei într-un SC cartezian ortogonal rezultă:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \\ &= \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} = f'_1(t)\vec{i} + f'_2(t)\vec{j} + f'_3(t)\vec{k}, \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x} = f'_1(t), \quad v_y = \dot{y} = f'_2(t), \quad v_z = \dot{z} = f'_3(t), \\ v^2 &= v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = f'^2_1 + f'^2_2 + f'^2_3. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Componenta vitezei pe o axă este egală cu derivata în raport cu timpul a coordonatei respective.

Derivatele există în virtutea ipotezei derivabilității funcțiilor (1.2) (observăm că, continuitatea funcțiilor nu implică derivabilitatea; există funcții continue pe un interval și niciăieri derivabile).

Legea de mișcare pe traiectorie (1.3') $s = f(t)$ se obține din ecuațiile cinematice ale mișcării (1.2) astfel:

$$v = \dot{s} = \frac{ds}{dt}, \quad ds = v dt = \pm \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} dt = \pm \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt,$$

de unde

$$s = s_0 \pm \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt = s_0 \pm \int_{t_0}^t \sqrt{f'^2_1 + f'^2_2 + f'^2_3} dt. \quad (1.14)$$

În mișcarea rectilinie direcția vectorului vitează \vec{v} este fixă.

Observație. Spre deosebire de mecanica clasică, în mecanica *cuantică* particulele atomice nu au o traiectorie bine definită și nu au *simultan* poziția și viteza bine determinate (conform relațiilor de nedeterminare ale lui Heisenberg).

Exemplu. Fie mișcarea *rectilinie uniformă* (pe scurt, *uniformă*), deci $\vec{v} = \text{const}$. Atunci

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad d\vec{r} = \vec{v} dt, \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^t \vec{v} dt = \vec{r}_0 + \vec{v}(t - t_0). \quad (1.15)$$

Aceasta este forma vectorială a legii de mișcare rectilinie uniformă (fig. 1.5). Ecuația (1.15) este totodată ecuația vectorială, parametrică (în t), a traiectoriei — linie dreaptă în spațiu. Pe componente, proiectînd ecuația vectorială pe axe într-un SC cartezian, avem:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_x(t - t_0), \quad y = y_0 + v_y(t - t_0), \\ z &= z_0 + v_z(t - t_0). \end{aligned} \quad (1.16)$$

care reprezintă ecuațiile cinematice ale mișcării uniforme și în același timp ecuațiile parametriche ale traiectoriei — linii drepte în spațiu.

Atingînd axa Ox chiar pe dreapta mișcării avem o singură ecuație:

$$x = x_0 + v(t - t_0), \quad \left(v = \frac{dx}{dt} \right). \quad (1.16')$$

Aici v nu este modulul vitezei, ci o mărime algebrică (viteza pe traiectorie).

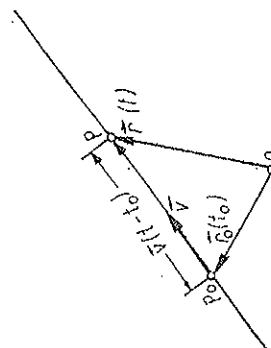


Fig. 1.5

1.7. CURBURA ȘI RAZA DE CURBURĂ

În cazul unui cerc, raza sa R este totodată raza de curbura. Curbura se definește ca inversul razei de curbura: $C = 1/R$. Cercul are deci în toate punctele sale aceeași curbura $C = 1/R$.

Trei puncte vecine necoliniare pe o curbă oarecare definesc un cerc și un plan conținând acest cerc (fig. 1.8). Raza acestui cerc de curbura „mediu”

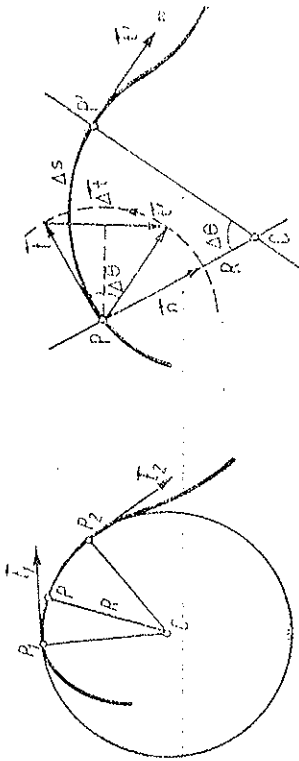


Fig. 1.8

a curbei pe porțiunea $P_1 P P_2$. Cercul limită, obținut când P_1 și P_2 tind către P , se numește *cerc de curbura* sau *cerc osculator* al curbei în punctul P ; el are 3 puncte comune confundate cu curba (în P); raza sa dă raza de curbura și centrul său dă centrul de curbura al curbei în punctul P . Planul limită se numește *plan osculator*, el conține cercul de curbura. Pentru o linie dreaptă $R \rightarrow \infty$ și $C = 0$ (planul osculator devine nedeterminat).

O altă construcție echivalentă este următoarea (fig. 1.9): ducem în două puncte vecine P, P' tangentele \vec{t}, \vec{t}' și planele normale (perpendiculare pe tangente). Tangentele \vec{t}, \vec{t}' duse în P definesc un plan, iar planele normale se taie după o dreaptă perpendiculară pe acest plan. La limită, când $P' \rightarrow P$, planul tangentelor devine plan osculator al curbei în P , iar dreapta de intersecție a planelor normale devine dreaptă *polară*, care trece prin centrul de curbura și este perpendiculară pe planul osculator. Această construcție generalizează pentru curbe oarecare construcția similară pentru cerc (dacă planul figurii 1.9 este planul tangentelor duse în P , atunci pentru o curbă strămbă P' va fi deplasat în spatele sau în fața figurii).

Prin definiție, *curbura*

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds}. [C] = \frac{\text{rad}}{\text{m}}, R = \frac{1}{C} = \frac{ds}{d\theta}, \quad (1.20)$$

unde $\Delta\theta$ este unghiul (în radiani) dintre două tangente vecine, duse în două puncte vecine la distanța curbilime Δs între ele.

Din construcția fig. 1.9 se vede că $\Delta s/\Delta\theta$ este raza unui cerc care aproximează arcul Δs , prin urmare la limită $\Delta s/\Delta\theta$ va da raza cercului de curbura (osculator).

Curbura $C = d\theta/ds$ măsoară gradul de abatere a curbei de la o linie dreaptă: de la tangenta sa în punctul considerat. Curbura este egală cu unghiul (în rad) dintre două tangente la curbă în două puncte vecine, raportat la înălțimea arcului de curbura dintre ele, sau altfel, curbura este egală cu

unghiul cu care se rotește tangenta la curbă, atunci când ne deplasăm pe curbă cu o unitate de lungime. În sfârșit, curbura este egală cu „viteza” de rotație a tangentei în raport cu deplasarea pe curbă. Prin urmare, curbura (gradul de abatere de la o linie dreaptă) într-un punct dat al curbei este mare, dacă este mare unghiul de rotație a tangentei pe unitate de lungime a curbei, în vecinătatea aceluia punct.

Normala la curbă (adică perpendiculara pe tangentă), conținută în planul osculator, se numește *normala principală* (versorul \vec{n} îndreptat spre centrul de curbura). Normala la curbă, perpendiculară pe planul osculator, se numește *binormală*; versorul ei se alege conform produsului vectorial:

$$\vec{b} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{t} \times \vec{n} \quad (1.21)$$

(în fig. 1.9 de la cititor spre figură). Astfel, în fiecare punct al curbei avem un triedru ortogonal ($\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$) numit triedru *principal* sau *natural* (sau triedru Frénet).

Din fig. 1.9 se vede că

$$\left| \frac{\Delta \vec{t}}{\Delta \theta} \right| = \frac{2|\vec{t}| \sin(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta} = \frac{\sin(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta/2} \rightarrow 1 \text{ când } \Delta\theta \rightarrow 0, (|\vec{t}| = 1).$$

prin urmare derivata $d\vec{t}/d\theta$, având modulul 1, este un versor. Când $P' \rightarrow P$ pe curbă ($\Delta\theta \rightarrow 0$), versorul \vec{t}' , se rotește în jurul lui P , astfel încât $\Delta \vec{t}$ devine perpendicular pe \vec{t} și orientat spre centrul de curbura, după versorul \vec{n} .

Prin urmare, în modul, direcție și sens:

$$\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{t}}{\Delta\theta} = \frac{d\vec{t}}{d\theta} = \vec{n}, \quad (1.22)$$

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d\vec{t}}{d\theta} \frac{d\theta}{ds} = C\vec{n} = \frac{\vec{n}}{R}. \quad (1.23)$$

Aceasta este prima formulă a lui Frénet.

Observație. Un vector variabil \vec{u} , dar de modul constant, de exemplu, un versor, nu se poate decât roti (modul fiind constant), deci ducându-l dintr-un punct fix, vârful său descrie o curbă situată pe o sferă (de rază egală cu modulul vectorului).

fig. 1.10) (pentru versorul \vec{t} sfera este desenaată parțial punctată în fig. 1.9). Variația vectorului de modul constant va fi egală cu coarda (secantă) la această sferă:

$$|\Delta \vec{u}| = 2|\vec{u}| \sin \frac{\Delta\theta}{2}.$$

La limită $\Delta \vec{u}$ devine $d\vec{u}$ tangent la sferă, deci perpendicular pe vector. Aceasta rezultă și din condiția:

$$\vec{u}\vec{u} = \text{const} \rightarrow \vec{u}d\vec{u} = 0, \quad \text{deci } d\vec{u} \perp \vec{u}. \quad (1.24)$$

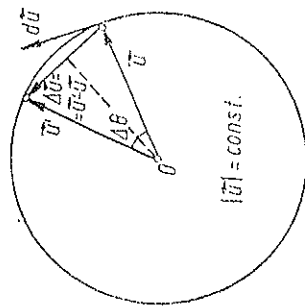


Fig. 1.10

și deci

$$\begin{aligned}\bar{v} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} (\Delta_t \bar{v} + \Delta_n \bar{v}) = \frac{d_t \bar{v}}{dt} + \frac{d_n \bar{v}}{dt} = \\ &= \frac{dv}{dt} \bar{t} + v \frac{d\theta}{dt} \bar{n} = \bar{v} \bar{t} + v \frac{d\theta}{ds} \bar{n} = \bar{v} \bar{t} + \frac{v^2}{R} \bar{n}. \quad (1.29)\end{aligned}$$

O mișcare curbilinie este totdeauna accelerată din cauza variației direcției vitezei ($a_n = v^2/R \neq 0$). Dacă $a_t = \dot{v} = 0$ ($v = \text{const}$), mișcarea este uniformă pe traiectorie sau curbilinie uniformă și accelerația se reduce la accelerația normală a_n . În mișcarea rectilinie $a_n \equiv 0$ ($R \rightarrow \infty$).

Aplicații

a) Dacă viteza pe traiectorie v variază cu cantități egale în timpuri egale, mișcarea se numește *uniform variată pe traiectorie sau curbilinie uniform variată* (de exemplu, circulară uniform variată) și accelerația a_t este constantă:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \text{const} = \frac{dv}{dt} = a_t, \quad \int dv = \int a_t dt, \quad v = v_0 + a_t(t - t_0), \quad (1.30)$$

$$\int ds = \int v dt = \int (v_0 + a_t(t - t_0)) dt = s_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} a_t(t - t_0)^2;$$

sau mai simplu (dacă condițiile inițiale, poziția s_0 și viteza v_0 , se referă la momentul $t_0 = 0$):

$$v = v_0 + a_t t, \quad s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_t t^2. \quad (1.30')$$

Eliminând timpul t rezultă formula generală a lui Galilei:

$$v^2 = v_0^2 + 2a_t(s - s_0), \quad (1.31)$$

și eliminând accelerația, rezultă

$$s = s_0 + \frac{v_0 + v}{2} (t - t_0) = s_0 + \bar{v}(t - t_0), \quad \bar{v} = \frac{v_0 + v}{2}. \quad (1.32)$$

În mișcarea uniform variată *rectilinie* (Galilei 1638): $R \rightarrow \infty$ și $a_r = 0$, astfel încît în (1.30—31) a_t coincide cu a .

Grafic, viteza se reprezintă (în funcție de timp) printr-o linie dreaptă. Panta dreptei reprezintă accelerația tangențială, iar aria mărginită de dreaptă reprezintă deplasarea curbilinie Δs . Coordonata s se reprezintă printr-o parabolă (fig. 1.12). Panta tangentei la parabolă reprezintă viteza. Viteza se anulează în dreptul minimumului ($a_t > 0$) sau maximumului ($a_t < 0$) parabolici (deoarece $v = \dot{s}$).

Analog demonstrației date pentru versorul \bar{t} rezultă că *diferențiala oricărui versor este egală în modul cu unghiul de rotație a versorului* ($d\bar{t} = d\theta$), iar ca direcție este perpendiculară pe versor, adică *derivata unui versor în raport cu unghiul de rotație este un versor perpendicular pe versorul inițial* ($\frac{d\bar{t}}{d\theta} = \bar{n} \perp \bar{t}$).

1.3. ACCELERAȚIILE TANGENȚIALĂ ȘI NORMALĂ

Derivăm (1.10), ținînd seama de (1.23):

$$\begin{aligned}\bar{a} = \dot{\bar{v}} &= (\dot{v} \bar{t})' = \dot{v} \bar{t} + v \bar{t}' = \dot{v} \bar{t} + v \frac{d\bar{t}}{ds} \dot{s} = \\ &= \dot{v} \bar{t} + \frac{v^2}{R} \bar{n} = a_t \bar{t} + a_n \bar{n} = \bar{a}_t + \bar{a}_n, \quad (1.25)\end{aligned}$$

$$a_t = \dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s}, \quad a_n = \frac{v^2}{R}, \quad a_\theta \equiv 0. \quad (1.26)$$

Prin urmare, în fiecare moment accelerația \bar{a} se află în planul osculator al traiectoriei și se descompune într-o componentă tangențială a_t de-a lungul tangentei la traiectorie, deci paralelă cu viteza \bar{v} (dacă v crește, atunci $a_t > 0$), și o componentă normală a_n , îndreptată spre centrul de curbură (numită și accelerație centripetă). Componenta a_t se datorește variației modulei vitezei, iar componenta a_n se datorește variației direcției vitezei.

O variantă a demonstrației rezultă din fig. 1.11: $\Delta_t \bar{v}$ provine din variația modulei vitezei (se anulează dacă $v' = v$), iar $\Delta_n \bar{v}$ provine din variația direcției vitezei (se anulează dacă \bar{v} nu se rotește):

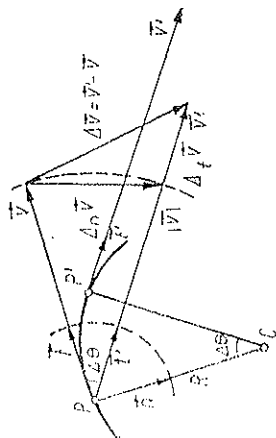


Fig. 1.11

$$\left| \frac{\Delta_n \bar{v}}{\Delta t} \right| = \left| \frac{v' - v}{\Delta t} \right| = \left| \frac{\Delta v}{\Delta t} \right| \rightarrow \left| \frac{dv}{dt} \right|, \quad (1.27)$$

$$\left| \frac{\Delta_t \bar{v}}{\Delta t} \right| = \frac{2v \sin(\Delta\theta/2)}{\Delta t} = v \frac{\sin(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta/2} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \rightarrow v \frac{d\theta}{dt}.$$

La limită cînd $P' \rightarrow P$ ($\Delta\theta \rightarrow 0$), $\Delta_t \bar{v}$ devine paralel cu \bar{v} (sau cu \bar{t}), iar $\Delta_n \bar{v}$ devine perpendicular pe \bar{v} (sau pe \bar{t}) deci paralel cu \bar{n} . Prin urmare, în modul, direcție și sens:

$$\frac{d_t \bar{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta_t \bar{v}}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \bar{t}; \quad \frac{d_n \bar{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta_n \bar{v}}{\Delta t} = v \frac{d\theta}{dt} \bar{n} \quad (1.28)$$

În cazul $a_t < 0$ ($v_0 > 0$), mișcarea este uniform încetinită sau frînată (întîrziată) pe traiectorie și există un moment t_m cînd corpul se oprește ($v = 0$):

$$v = v_0 + a_t t = 0 \rightarrow t_m = -\frac{v_0}{a_t} = \frac{v_0}{2a_t}, \quad s_m = s_0 - \frac{v_0^2}{2a_t} = s_0 + \frac{v_0^2}{2|a_t|}. \quad (1.33)$$

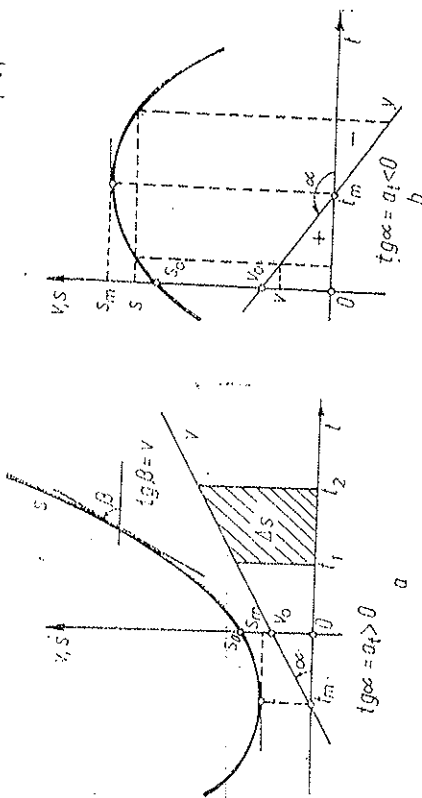


Fig. 1.12

Atingînd distanța maximă s_m , corpul se oprește și apoi se întoarce accelerat, parcurgînd aceleași puncte cu viteze de același modul, dar de semn schimbat.

În cazul $a_t > 0$ ($v_0 > 0$), mișcarea este uniform accelerată, dar dacă prelungim mișcarea în trecut ($t < 0$), vom găsi și o etapă de mișcare încetinită (fig. 1.12, a).

Din (1.30) rezultă că *unitatea de accelerație* este egală cu accelerația unui mobil în mișcare uniform variată, a cărui viteză crește cu o unitate (1 m/s) într-un interval de timp egal cu unitatea (1 s):

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \rightarrow [a] = [v]/[t] = \text{L.T}^{-2} = 1 \text{ m/s}^2 \text{ în SI}. \quad (1.34)$$

b) Mai general, fie o mișcare cu *vectorul accelerație constant* $\vec{a} = \text{const}$ (mișcare uniform variată generală). Atunci

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \rightarrow d\vec{v} = \vec{a} dt \rightarrow \vec{v} = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a} dt = \vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0). \quad (1.35)$$

Aceasta reprezintă de fapt ecuația vectorială, parametrică, a hodografului vitezei — o linie dreaptă (fig. 1.13). Mai departe,

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad d\vec{r} = \vec{v} dt, \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a} dt = \vec{v}_0 + \int_0^t [\vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0)] dt = \\ &= \vec{v}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2} \vec{a}(t - t_0)^2. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Dacă \vec{v}_0 este *coliniar* cu \vec{a} , obținem o mișcare *rectilinie* uniform variată. Altfel mișcarea este plană în planul definit de vectorii \vec{v}_0 și \vec{a} și ecuația (1.36) reprezintă ecuația vectorială, parametrică, a traiectoriei, care este o *parabolă* în acest plan, cu axa de simetrie paralelă cu \vec{a} , și cu concavi-

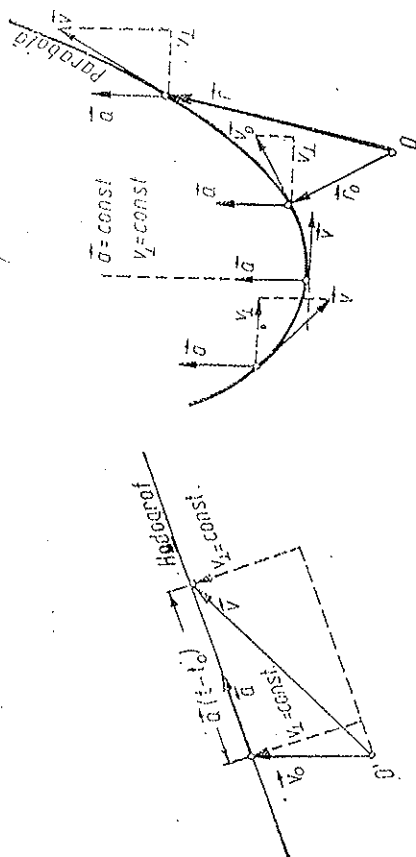


Fig. 1.13

Fig. 1.14

tatea orientată, bineînțeles, în sensul lui \vec{a} (fig. 1.14). Dacă alegem axele de coordonate Oxy în planul mișcării cu axa Oy paralelă cu \vec{a} , atunci pe componente (proiectăm ecuațiile vectoriale pe axe):

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = v_{0y} + a(t - t_0) \text{ și } \\ v_z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = x_0 + v_{0x}(t - t_0) \\ y = y_0 + v_{0y}(t - t_0) + \frac{1}{2} a(t - t_0)^2 \\ z = 0 \end{cases} \quad (1.37)$$

$$(a_x = 0, \quad a_y = a, \quad a_z = 0),$$

de unde, eliminînd timpul, rezultă ecuația traiectoriei:

$$y = y_0 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}}(x - x_0) + \frac{1}{2} \frac{a}{v_{0x}^2} (x - x_0)^2, \quad (1.37')$$

care este o *parabolă* (fiind de forma $y = Ax^2 + Bx + C$).

1.9. MIȘCAREA ÎN CÂMPUL GRAVITAȚIONAL (în vid)

Experiența cu tubul lui Newton — tub vidat, suficient de lung, conținînd diferite obiecte — arată că *toate corpurile cad în vid cu aceeași accelerație* g , independentă de masa, natura, dimensiunile sau forma corpului. Vectorul accelerație \vec{g} este orientat vertical spre centrul Pămîntului. Accelerația gravitațională g variază cu altitudinea, și chiar la nivelul mării, va-

riază ușor cu latitudinea, datorită turtirii Pământului la Poli și rotației diurne: la ecuator $g_e = 9,7895 \text{ m/s}^2$, la pol $g_p = 9,8322 \text{ m/s}^2$, la paralela 45° : $g_0 = 9,80616 \text{ m/s}^2$.

În aer, pe lângă greutatea corpului $G = mg$, acționează și forța de rezistență a aerului F_r . Pentru corpuri mici și grele $G \gg F_r$ și obținem rezultate apropiate de mișcarea în vid.

Alegind axele ca în fig. 1.15 (viteza inițială \vec{v}_0 în planul Oxy) avem:

$$a_x = -\frac{dv_x}{dt} = 0, \quad a_y = -\frac{dv_y}{dt} = -g, \quad (a_z \equiv 0), \quad (1.38)$$

de unde prin integrare:

$$\frac{dx}{dt} = v_x = v_{0x}, \quad \frac{dy}{dt} = v_y = v_{0y} - gt, \quad (v_z = v_{0z} \equiv 0) \quad (1.39)$$

și printr-o nouă integrare:

$$x = x_0 + v_{0x}t, \quad y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2, \quad (z = z_0 \equiv 0), \quad (1.40)$$

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha_0, \quad v_{0y} = v_0 \sin \alpha_0.$$

Miscarea este plană. Constantele de integrare au semnificația de viteză inițială și poziție inițială (la $t = 0$). Pe orizontală proiecția P' se mișcă uniform cu viteza $v_{0x} = v_0 \cos \alpha_0$, iar pe verticală proiecția P'' se mișcă uniform variat cu viteza inițială $v_{0y} = v_0 \sin \alpha_0$ și accelerația $a_y = -g$.

Eliminând timpul din (1.40) se obține ecuația traiectoriei, a parabolei:

$$y - y_0 = (x - x_0) \tan \alpha_0 - \frac{g(x - x_0)^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_0}. \quad (1.41)$$

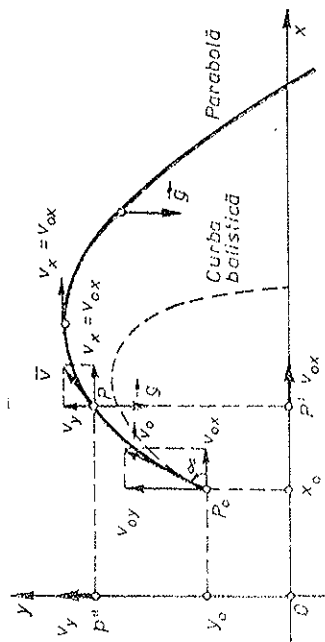


Fig. 1.15

Alegând pentru simplificare $x_0 = y_0 = 0$, să calculăm înălțimea maximă y_m a traiectoriei și distanța maximă b pe orizontală (bătaia). Avem pentru coordonatele maximumului traiectoriei:

$$y'(x) = 0 \rightarrow x_m = \frac{1}{2g} v_0^2 \sin 2\alpha_0, \quad y_m = \frac{1}{2g} v_0^2 \sin^2 \alpha_0 \quad (1.42)$$

sau altfel

$$v_y = 0 \rightarrow t_m = \frac{1}{g} v_0 \sin \alpha_0, \quad (1.43)$$

care introdus în (1.40) dă x_m, y_m .

Din simetria parabolei sau din condiția $y = 0$ rezultă bătaia b :

$$b = 2x_m = \frac{1}{g} v_0^2 \sin 2\alpha_0 \text{ după } T = 2t_m = \frac{2}{g} v_0 \sin \alpha_0. \quad (1.44)$$

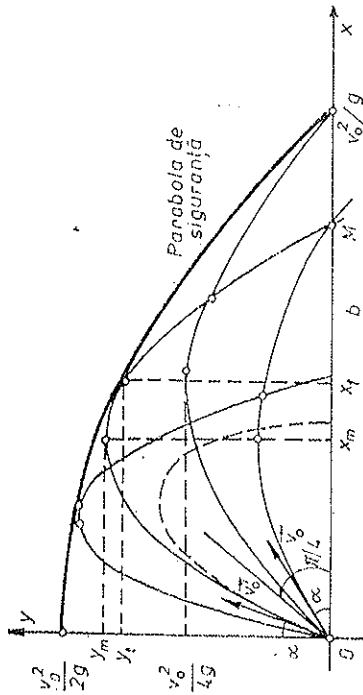


Fig. 1.16

Există încă o parabolă care atinge ținta M (fig. 1.16), sub unghiul complementar $\pi/2 - \alpha_0$:

$$b = \frac{1}{g} v_0^2 \sin 2 \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_0 \right) = \frac{1}{g} v_0^2 \sin 2\alpha_0.$$

Pentru v_0 dat, bătaia este maximă dacă $\alpha_0 = 45^\circ$:

$$b_{\max} = v_0^2 / g. \quad (1.45)$$

Dacă se aruncă corpul cu aceeași viteză v_0 sub diferite unghiuri α_0 , atunci toate traiectoriile parabole sînt înfășurate de așa-numita *parabolă de siguranță* (de fapt un paraboloid cu axa Oy):

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}, \quad (1.46)$$

care este atinsă de o traiectorie dată într-un punct de abscisă și ordonată:

$$x_t = v_0^2 / g \operatorname{ctg} \alpha_0 > x_m, \quad y_t = \frac{v_0^2}{2g} (1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha_0) < y_m. \quad (1.47)$$

Numai punctele situate sub această parabolă de siguranță pot fi atinse de un corp aruncat cu viteza inițială v_0 (prin două traiectorii dacă ținta este interioară și printr-o singură traiectorie dacă ținta este pe parabolă de siguranță).

În adevăr, ecuația (1.41) este de gradul doi în raport cu $\tan \alpha_0$:

$$y = x \tan \alpha_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2} (1 + \tan^2 \alpha_0). \quad (1.48)$$

Dacă discriminantul acestei ecuații

$$\Delta \sim \frac{v_0^2}{2g} - y - \frac{gx^2}{2v_0^2} \quad (1.49)$$

este pozitiv, avem două soluții reale distincte pentru $\tan \alpha_0$: cele două traiectorii amintite. Analizând discriminantul, obținem ecuația (1.46) — locul geometric al punctelor atinse de o singură traiectorie. Pentru punctele exterior parabolă de siguranță discriminantul este negativ și nu avem soluții reale pentru $\tan \alpha_0$.

Dacă $\alpha_0 = \pi/2$, obținem cazul aruncării în sus pe verticală.

Timpu de urcare (egal cu timpul de coborîre) și înălțimea maximă sînt în acest caz:

$$t_m = \frac{v_0}{g}, \quad h_m = \frac{v_0^2}{2g}, \quad (1.50)$$

care se pot obține și din (1.33) punind $a_t = -g$.

Traectoria reală, ținînd seama de rezistența aerului, nu mai este o parabolă, ci așa-numita *curbă balistică* (fig. 1.15), sensibilă la forma corpului.

Observație. Mișcarea în cîmpul gravitațional terestru în vid ($\vec{g} = \text{const}$) este o mișcare uniform variată generală și conform lui (1.36) se scrie vectorial astfel:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t, \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g}t^2. \quad (1.51)$$

Proiectînd aceste ecuații pe axele unui SC ortogonal convenabil, regăsim ecuațiile (1.39—40).

1.10. MIȘCAREA CIRCULARĂ

Viteza pe traiectorie sau viteza liniară este ($R = \text{const}$, θ în radiani, fig. 1.17):

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(\theta R)}{dt} = \frac{d\theta}{dt} R = \omega R, \quad (1.52)$$

unde

$$\omega \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \quad (1.53)$$

este *viteza unghiulară* (instantanee sau momentană). Accelerația tangențială este:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R = \varepsilon R, \quad (1.54)$$

unde

$$\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta} \quad (1.55)$$

este *accelerația unghiulară* (instantanee) în mișcarea circulară. Accelerația normală sau centripetă este:

$$a_n = -\frac{v^2}{R} = \omega v = \omega^2 R \quad (1.56)$$

și accelerația totală:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (1.57)$$

Viteza și accelerația pot fi scrise vectorial dacă introducem *vectorul viteze unghiulară* $\vec{\omega}$ situat pe axa cercului în sensul dat de regula burghiului. Atunci vectorul accelerație unghiulară $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$ va fi situat pe aceeași axă ($\vec{\varepsilon} \parallel \vec{\omega}$) (fig. 1.18).

Se vede imediat că

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}, \quad (1.58)$$

$$\vec{a}_t = \vec{\varepsilon} \times \vec{R}, \quad \vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v} = -\omega^2 \vec{R} = -\frac{v^2}{R^2} \vec{R}. \quad (1.59)$$

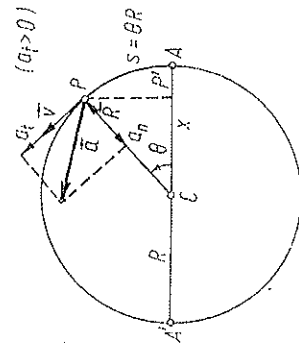


Fig. 1.17

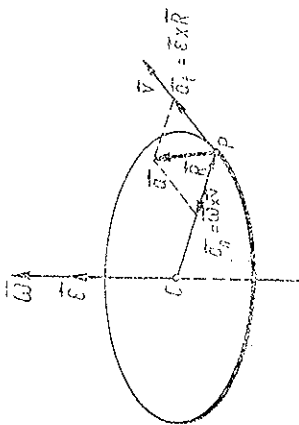


Fig. 1.18

Exemple. a) În cazul mișcării *circulare uniforme* se parcurg arce egale în timpuri egale: $\Delta s/\Delta t = \text{const} = v$. Atunci $\omega = v/R = \text{const}$, $\varepsilon = \dot{\omega} = 0$, $a_t = \varepsilon R = 0$, dar $a_n = v^2/R \neq 0$!

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \omega = \text{const} = \frac{d\theta}{dt} = \omega \rightarrow \theta = \int \omega dt, \quad \theta = \theta_0 + \omega(t - t_0)$$

$$\text{sau } \theta = \theta_0 + \omega t, \quad \text{dacă } t_0 = 0. \quad (1.60)$$

Unitatea de viteză unghiulară este egală cu viteza unghiulară a unui mobil care într-o mișcare circulară uniformă descrie un unghi la centru de 1 rad în unitatea de timp (1 s):

$$\omega = \frac{\theta}{t}, \quad [\omega] = [\theta]/[t] = T^{-1} = 1 \text{ s}^{-1} \text{ în SI (sau 1 rad/s)}. \quad (1.61)$$

Frecvența ν sau turajul n se exprimă prin ω astfel:

$$\nu = n = \frac{\omega}{2\pi}, \quad \omega = 2\pi\nu, \quad (1.62)$$

$$[\nu] = 1 \text{ s}^{-1} \equiv 1 \text{ Hz}, \quad [\omega] = 1 \text{ s}^{-1} \text{ sau rot/s.} \quad (1.63)$$

Perioada (timpul unei rotații complete) este

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}, \quad [T] = 1 \text{ s.} \quad (1.64)$$

b) În mișcarea circulară *neuniformă* ω este variabil, funcție de timp. De exemplu, în mișcarea circulară *uniform variată* avem:

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \text{const} = \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon, \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon t, \quad (1.65)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega, \quad \theta = \int \omega dt = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2, \quad (1.66)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\varepsilon(\theta - \theta_0), \quad (1.67)$$

$$\theta = \theta_0 + \frac{\omega_0 - \omega}{2} t = \theta_0 + \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\varepsilon}, \quad \omega = \frac{\omega_0 + \omega}{2}.$$

Numărul de rotații efectuate:

$$N = (\theta - \theta_0) : 2\pi. \quad (1.68)$$

Unitatea de *acclerație unghiulară* este egală cu accelerația unghiulară a unui mobil aflat în mișcare circulară uniform accelerată a cărei viteză unghiulară crește cu o unitate (1 rad/s) într-un interval de timp egal cu unitatea (1 s):

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}, \quad [\varepsilon] = \frac{[\omega]}{[t]} = T^{-2} = 1 \text{ s}^{-2} \text{ (sau } 1 \text{ rad/s}^2\text{)}. \quad (1.69)$$

e) Există o analogie între mișcarea circulară (uniformă, uniform variată etc.) și mișcarea curbilinie sau rectilinie corespunzătoare (uniformă, uniform variată etc.), mai exact între mișcările unghiulare și cele liniare, în baza formulelor (1.50–32) și (1.65–67). Mărimile care se corespund sunt următoarele:

Mișcare curbilinie (mărimi liniare)	Mișcare circulară (mărimi unghiulare)	Mișcare curbilinie (mărimi liniare)	Mișcare circulară (mărimi unghiulare)
s	θ	$s^2 = v_0^2 + 2a_s s$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\varepsilon\theta$
t	t	$\frac{v^2}{s} = \frac{v_0^2 + v}{2} t$	$\frac{\omega^2}{\theta} = \frac{\omega_0^2 + \omega}{2} t$
$v = \dot{s}$	$\omega = \dot{\theta}$	$t_m = -\frac{v_0}{a_s}$	$t_m = -\frac{\omega_0}{\varepsilon}$
$s = s_0 + vt$	$\theta = \theta_0 + \omega t$	$s_m = -\frac{v_0^2}{2a_s}$	$\theta_m = -\frac{\omega_0^2}{2\varepsilon}$
$a_t = \dot{v} = \ddot{s}$	$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$		
$v = v_0 + a_t t$	$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$		
$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_t t^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2$		

1.11. MIȘCAREA OSCILATORIE ARMONICĂ

Proiectând punctul P care se mișcă uniform pe cerc (fig. 1.17), pe diametrul AA' al cercului, obținem (notăm aici raza cercului cu A):

$$x = A \cos \theta = A \cos(\omega t + \alpha). \quad (1.70)$$

Mișcarea punctului P' de-a lungul dreptei AA' , descrisă de ecuația (1.70), se numește mișcare *armonică* (sau sinusoidală) și joacă un rol important în natură. Mărimea x se numește *elongație* și reprezintă distanța punctului până la centrul mișcării; A este *amplitudinea* mișcării, adică elongația maximă ($-A \leq x \leq A$); argumentul $\theta = \omega t + \alpha$ se numește *faza* mișcării, α este faza inițială (adică θ pentru $t = 0$); ω se numește *frecvența unghiulară* (sau pulsație). Viteza și accelerația punctului material sînt:

$$v = \dot{x} = -\omega A \sin(\omega t + \alpha) = \omega A \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} + \alpha\right), \quad (1.71)$$

$$-\omega A \leq v \leq \omega A,$$

$$a = \dot{v} = \ddot{x} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \alpha) = \omega^2 A \cos(\omega t + \pi + \alpha) = -\omega^2 x, \quad (1.72)$$

$$-\omega^2 A \leq a \leq \omega^2 A.$$

Viteza este defazată înaintea elongației cu $\pi/2$ sau $T/4$, iar accelerația cu π sau $T/2$ (fig. 1.19). Viteza se anulează cînd elongația este maximă și invers, viteza este maximă pentru $x = 0$ (de exemplu, oscilațiile mici ale unui pendul sau oscilațiile verticale ale unui corp suspendat pe un resort

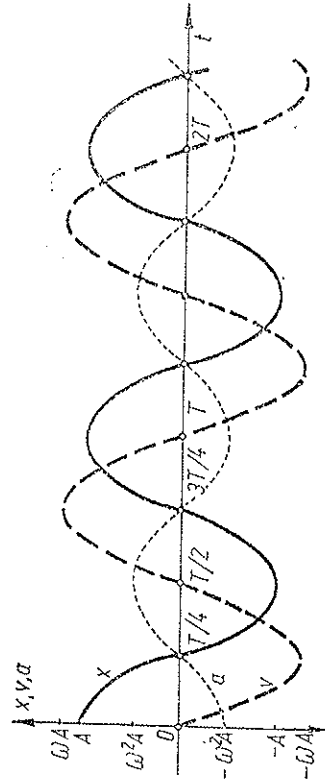


Fig. 1.19

elastic). Accelerația este în opoziție de fază cu elongația și proporțională cu elongația, fiind îndreptată tot timpul spre centrul mișcării.

În ecuația (1.70) poate fi luat tot atât de bine și sinusul în locul cosinusului (adică proiecția mobilului pe diametrul vertical), aceasta revine la schimbarea fazei inițiale cu $\pi/2$.

PROBLEME

1. Care este hodograful: a) vitezei; b) accelerației, unei pietre aruncată sub un unghi α_0 față de orizontală cu viteza inițială v_0 ?
R. a) Segmentul de dreaptă: $v_x = v_0 \cos \alpha_0$, $|v_y| \leq v_0 \sin \alpha_0$; (fig. 1.20);
b) Se reduce la un punct.

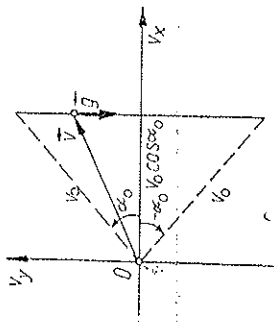


Fig. 1.20

2. Care este hodograful vitezei și accelerației unei particule în mișcare circulară uniformă cu viteza v pe un cerc de rază R ?
R. Cerc de rază v ; cerc de rază v^2/R .

3. Care este hodograful vitezei unei particule în mișcare circulară uniform variată?
R. „Spirala” $v^2 = R^2 \omega_0^2 + 2\epsilon(\theta - \theta_0) = v_0^2 + 2a_t R(\theta - \theta_0)$.

4. Un corp aruncat oblic în câmp gravitațional în vid atinge înălțimea maximă $h = 14,7$ m, raza de curbura a traiectoriei fiind în acest punct $R = 9,8$ m. Să se afle viteza inițială v_0 și unghiul ei α_0 cu orizontală.
R. $v_0 = \sqrt{g(2h + R)} = 19,6$ m/s; $\alpha_0 = \arctg \sqrt{2h/R} = 60^\circ$.

5. Un corp se mișcă pe o traiectorie după legea $s = b^n \cdot n - c^n$ (b, c, n — constante pozitive), la momentul inițial $t = 0$, coordonata inițială fiind $s_0 = 0$. Să se deducă legea variației vitezei în funcție de timp.

$$R. v = \sqrt{\frac{c^{n-1}}{b^{n-1}} + \frac{n-1}{nb^n} t}.$$

6. Într-o mișcare înclinată diagrama vitezei în funcție de timp este reprezentată printr-un start de elipsă din primul cadran (fig. 1.21). Viteza inițială este $v_0 = 20$ m/s și timpul până la oprire $t_m = 20$ s. Să se calculeze distanța s_m parcursă până la oprire.

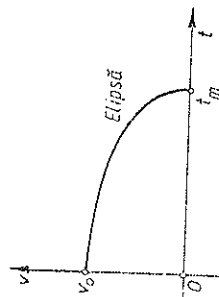


Fig. 1.21

$$R. s_m = \frac{\pi}{4} \cdot v_0 t_m = 314 \text{ m}.$$

7. Cunoșcând accelerația tangențială $a_t = f(t)$ și timpul până la oprire t_m al unui mobil, să se scrie legea vitezei în funcție de timp și să se exprime distanța s_m până la oprire printr-o singură integrală.

$$R. v = - \int_0^{t_m} f(t) dt; \quad s_m = - \int_0^{t_m} t f(t) dt.$$

8. Ecuațiile cinematice ale mișcării unui mobil sunt: $x = A \cos \omega t$, $y = B \sin \omega t$, (A, B, ω — constante pozitive). Să se afle: a) traiectoria; b) viteza; c) hodograful vitezei; d) accelerația totală și accelerația normală a_n ; e) raza de curbura a traiectoriei.

- R. a) Elipsa $x^2/A^2 + y^2/B^2 = 1$ parcursă în sens trigonometric; b) $v = A\omega e^{i\omega t} = \omega D'$, unde $h = A^2 B^2 / (B^2 x^2 + A^2 y^2)$ este distanța de la origine (centrul elipsei) până la tangenta la elipsă, $D' = \text{semidiametrul conjugat}$; c) elipsa $v_x^2/A^2 + v_y^2/B^2 = \omega^2$ (asemenea cu traiectoria); d) $a = \omega^2 r$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, orientată spre centrul elipsei, $a_n = \omega^2 h$; e) $R = A^2 B^2 / h^3$.

9. Un mobil descrie uniform cicloida (fig. 1.22).

$$x = R(z - \sin z), \quad y = R(1 - \cos z)$$

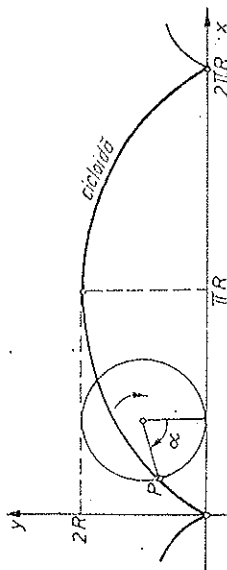


Fig. 1.22

10. Un lanț (sau un fir omogen) suspendat de capetele sale la sub acțiunea gravitației forma curbei „lănișor” (cosinus hiperbolic):
Reciproc: Un mobil se mișcă uniform pe o curbă plană cu viteza constantă v . Să se găsească ecuația curbei, dacă proiecția accelerației pe o dreaptă din plan care taie curba, este constantă ($a_y = \text{const} < 0$).

- R. a) $a_y = -v^2/4R$; b) cicloida (pentru $t = 0$ alegem $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = v$, $x = y = 0$):

$$x = R \arccos \left(1 - \frac{y}{R} \right) - \sqrt{y(2R - y)}, \quad (R = -v^2/4a_y).$$

11. Să se arate că alegând convenabil scăările pentru viteză și accelerație, unghiul sub care se vede vectorul accelerației normale din vârful vectorului vitezei este egal cu unghiul sub care se vede vectorul vitezei din centrul de curbura al traiectoriei.

$$y = b \operatorname{ch} \frac{x}{b} - \frac{b}{2} (e^{2x/b} + e^{-2x/b}), \quad (\dot{\theta} = \text{const}).$$

12. Să se calculeze, în funcție de viteză și accelerație, lungimea coardei interceptate pe cercul de curbura de către lîna de acțiune a accelerației.

$$R. l = 2v^2/a.$$

13. Un mobil descrie o traiectorie plană astfel, încît $v_x = c = \text{const.}$ Să se arate că atunci accelerația se scrie

$$a = v^3/Rc,$$

unde v este viteza mobilului și R raza de curbură.

14. Să se arate că în cazul unei mișcări plane viteza pe traiectorie a mobilului se scrie:

$$v = \pm R\dot{\theta},$$

unde R este raza de curbură a traiectoriei, iar θ unghiul dintre vectorul vitează (sau versorul tangentei la traiectorie) și o dreaptă fixă din planul mișcării.

15. Un mobil se mișcă în plan astfel, încît unghiul α dintre vitează și accelerație este constant. Să se arate că viteza pe traiectorie a mobilului se scrie

$$v = v_0 e^{\pm(\theta - \theta_0)/\alpha},$$

unde θ este unghiul dintre vectorul vitezei (sau versorul tangentei la traiectorie) și o dreaptă fixă din plan.

16. Ecuațiile mișcării unui mobil sint următoarele:

$$x = r \cos \omega t, \quad y = r \sin \omega t, \quad z = ct, \quad (r, \omega, c = \text{constante pozitive}).$$

Să se afie: a) viteza; b) hodograful vitezei; c) accelerația; d) raza de curbură.

- R. Traiectoria este o elice (dreaptă) de rază r și pas $h = c \frac{2\pi}{\omega}$; unghiul de înclinare

$$\tan \alpha = 2\pi r/h = r\omega/c; \quad a) \quad v = \sqrt{r^2\omega^2 + c^2} = r\omega/\sin \alpha = \text{const.}; \quad b) \quad \text{cercul } v_x^2 + v_y^2 = R^2\omega^2 \text{ din planul } v_z = c \text{ (viteza descrie suprafața unui con)}; \quad c) \quad a = a_n = r\omega^2 = v^2 \sin^2 \alpha / r = v^2/R, \quad \vec{a} \perp OZ \text{ și taie } OZ; \quad d) \quad R = r/\sin^2 \alpha.$$

17. Un mobil se mișcă uniform variat pe un cerc de rază $R = 10$ cm. Să se afie accelerația normală a_n a mobilului după $t = 20$ s, știind că după $N_0 = 5,0$ rot de la pornire viteza mobilului a fost $v_0 = 10$ cm/s.

$$R. \quad a_n = \frac{v_0^2}{16\pi^2 N_0^2 R^2} = 1,0 \text{ cm/s}^2.$$

18. Un mobil se mișcă pe o traiectorie circulară după legea $s = ct^3$, unde $c = 0,10$ cm/s³. Să se afie accelerația tangențială a_t în momentul cînd viteza este $v = 0,30$ m/s.

$$R. \quad a_t = 2/\sqrt{3} \pi v = 6,0 \text{ cm/s}^2.$$

19. Un mobil se mișcă pe un cerc de rază R astfel, încît unghiul α dintre vitează și accelerație este constant. Să se exprime viteza în funcție de timp, viteza inițială fiind v_0 .

$$R. \quad v = \frac{v_0 R}{R - v_0^2 \cot \alpha}.$$

20. Să se calculeze amplitudinea A și perioada T a oscilațiilor armonice ale unui mobil cînd vitezele mobilului $v_{1,2}$ corespundătoare elongațiilor $x_{1,2}$.

$$R. \quad A = \sqrt{\frac{v_1^2 x_1^2 - v_2^2 x_2^2}{v_1^2 - v_2^2}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{x_2^2 - x_1^2}{v_1^2 - v_2^2}}.$$

21. Două particule se mișcă cu vitezele constante $\vec{v}_{1,2}$. La un moment dat ele au vectorii de poziție $\vec{r}_{1,2}$. Care este condiția ca particulele să se ciocnească?

$$R. \quad \frac{|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = \frac{v_2 - v_1}{r_2 - r_1}.$$

CAPITOLUL 2

PRINCIPIILE DINAMICII

Mecanica clasică (newtoniană) se bazează pe trei legi generale sau *principii*, formulate de Isaac Newton în celebra sa carte „Principiile matematice ale filozofiei naturale” (1687).

2.1. PRINCIPIUL INERȚIEI (LEX PRIMA)

Experiența arată că un corp în repaus față de Pămînt rămîne în repaus atîtă timp cît asupra sa nu acționează alte corpuri, care să-l modifice această stare. De asemenea, experiențe efectuate cu bile netede și dure (de exemplu, de metal) lansate pe suprafețe orizontale netede și dure (de exemplu, pe gheață), cînd greutatea bilei este neutralizată de reacțiunea normală a planului și forțele de frecare sint mici, arată că mișcarea bilei se apropie tot mai bine de mișcarea *rectilinie uniformă*. De aici, prin abstractizare, se ajunge la principiul sau *legea inerției* (prima lege a lui Newton), cunoscută încă de Galilei (1632): *Un punct material rămîne în repaus sau în mișcare rectilinie uniformă atîtă timp cît asupra sa nu acționează alte corpuri care să-l schimbe această stare de repaus sau de mișcare rectilinie uniformă.*

Principiul inerției nu poate fi verificat direct experimental, deoarece nici un corp nu poate fi sustras complet acțiunii altor corpuri, de exemplu, atracției gravitaționale a Pămîntului. Dar este verificat prin toate consecințele sale.

Experiența arată de asemenea că la orice acțiune exterioară care caută să schimbe starea de repaus sau de mișcare rectilinie uniformă a corpului, corpul se opune, reacționează, adeseori destul de puternic.

Proprietatea unui corp de a-și menține starea de repaus sau de mișcare rectilinie uniformă, în absența acțiunilor exterioare, sau de a se opune la orice acțiune exterioară care caută să-i schimbe starea de mișcare, se numește *inerție*.

Astfel, corpurile sint *inerte* în sensul că nu-și pot schimba *de la sine* starea lor de repaus sau de mișcare rectilinie uniformă. *În virtutea inerției* corpurile se mișcă rectiliniu uniform în absența acțiunilor exterioare și *datorită inerției* tind să-și mențină această stare de mișcare, opunîndu-se sau reacționînd la acțiunile exterioare.

Conform principiului inerției, mișcarea rectilinie uniformă se *autoîntreține*, adică nu necesită nici o acțiune exterioară pentru menținerea ei. Dimpotrivă, orice acțiune exterioară strică o astfel de mișcare, curbând traiectoria și modificând viteza, adică produce o mișcare *accelerată*.

În practică se întâlnesc frecvent mișcări rectilinii uniforme, dar totdeauna produse de acțiunea altor corpuri, de exemplu, un tren tras de o locomotivă, o sanie trasă de un cal etc. În asemenea cazuri există totdeauna acțiuni opuse, de obicei frecările, astfel încât în total acțiunile exterioare se compensează reciproc. Prin urmare, principiul inerției se aplică și în cazul când rezultanta tuturor acțiunilor exterioare asupra punctului material este nulă.

Din principiul inerției rezultă de asemenea că mișcarea rectilinie uniformă joacă în natură un rol deosebit, privilegiat.

2.2. SISTEMELE DE REFERINȚĂ INERȚIALE

În formularea principiului inerției nu se spune nimic despre SR. Or, este evident că mișcarea rectilinie uniformă față de un anumit SR *nu* mai este astfel față de alte SR *accelerate* față de primul. Prin urmare, principiul inerției în nici un caz nu poate fi valabil față de orice SR. Dacă însă principiul inerției este valabil într-un SR dat, atunci el va fi automat valabil în toate SR care se mișcă *rectiliniu uniform* față de acesta, și sigur *nu* va fi valabil față de SR care se mișcă *accelerat* față de acesta (v. 2.1).

Sistemele de referință în care este valabil principiul inerției se numesc sisteme de referință inerțiale.

Newton a presupus existența unui spațiu absolut și a unui timp absolut: „Spațiul absolut nu este, din cauza naturii sale însăși, în nici un fel de raport cu vreun obiect oarecare, fiind mereu același și în nemăsurare”.

„Timpul absolut, adevărat și matematic, se scurge prin natura sa însăși, uniform, fără nici o relație cu vreun obiect oarecare”.

„Mișcarea absolută este deplasarea unui corp dintr-o poziție absolută spre altă poziție absolută”.

În spațiul absolut se alege un SR *absolut*, adică fix și invariabil. Drept SR absolut era considerat sistemul de coordonate astronomic legat de stelele fixe și nebuloasele îndepărtate, și timpul sideral. Experiența arată că față de acest SR principiul inerției este valabil cu toată precizia atinsă astăzi. Un sistem inerțial foarte bun este sistemul heliocentric al lui Copernic.

Un SR legat de Pământ nu este riguros inerțial, așa cum confirmă experiențele, din cauza rotației diurne a Pământului. Abaterile sînt însă mici și în primă aproximație le putem de obicei neglija, considerînd SR legat de Pământ ca fiind *practic inerțial*.

Din punctul de vedere al principiului inerției toate SR inerțiale sînt *absolut echivalente*, nici unul din ele nu poate fi considerat fix sau absolut. Aceeași concluzie rezultă și din celelalte principii ale mecanicii, astfel încît se poate afirma că *nu există un spațiu absolut, care să poată fi luat drept SR*.

Mai mult, în teoria relativității se arată că spațiul și timpul sînt *legate între ele* și proprietățile lor sînt *determinate de materie și mișcare*.

O formulare mai cuprinzătoare și mai profundă a principiului inerției este următoarea:

Particula suficient de depărtată unele de altele (izolate între ele) se mișcă unele față de altele rectiliniu uniform.

2.3. NOȚIUNEA DE FORȚĂ

Noțiunea de *forță* are la origine senzația de efort care apare atunci cînd ridicăm sau ținem o greutate, cînd tragem sau împingem un corp pe o suprafață. Totodată putem indica *direcția și sensul* în care îndreptăm efortul, precum și punctul unde aplicăm acest efort. De aici se obține prin abstracție noțiunea de *forță ca vector*. Prin intermediul forțelor corpurile acționează unele asupra altora, transmitînd mișcarea mecanică.

Forțele produc efecte *statice* de *deformare* a corpurilor (sau de echilibrare a altor forțe) și efecte *dinamice* de modificare a vitezei, adică de creare a *accelerațiilor*.

Exemple de forțe: greutatea corpurilor, presiunea sau tracțiunea produse de corpuri sau fire, reacțiunea elastică a unui resort deformat, rezistența opusă de fluid la înaintarea unui corp etc.

Măsurarea forțelor se face pe baza efectelor lor. Există corpuri, numite *elastice*, la care deformările (nu prea mari) dispar odată cu îndepărtarea forțelor care le-au produs, de exemplu, resorturile. Se poate considera că deformările elastice sînt proporționale cu forțele care le produc. *Dinamometrele* sînt resorturi elastice prevăzute cu riglă gradată pentru măsurarea alungirilor, deci și a forțelor respective. Un etalon mai bun îl constituie greutatea unui anumit corp de referință într-un anumit loc pe suprafața Pământului.

Astfel, unitatea *kilogram-forță* (kgf) este greutatea (în vid) a etalonului masă de 1 kg (păstrat la Sèvres) în câmpul gravitațional normal (standard) $g_n = 9,80665 \text{ m/s}^2$, care coincide practic cu valoarea $g_0 = 9,80616 \text{ m/s}^2$ de la nivelul mării și paralela 45° .

Experiențele (nerelativiste) arată că forțele se compun după regula paralelogramului (Heron din antichitate, S. Stevin 1605, G. Roberval 1636), adică sînt mărimi *vectoriale*. De aici se abstrage **principiul independenței acțiunii forțelor** (formulat separat de Newton):

Un corp sub acțiunea simultană a două forțe descrie diagonala unui paralelogram avînd ca laturi aceste forțe, în același timp în care ar descrie separat fiecare latură sub acțiunea forței corespunzătoare.

2.4. PRINCIPIUL FUNDAMENTAL (LEX SECUNDA)

Dacă aplicăm unui punct material diferite forțe \vec{F} , punctul material capătă accelerații \vec{a} coliniare și proporționale cu forțele aplicate (fig. 2.1):

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}, \quad \vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad (2.1)$$

unde m este un parametru pozitiv, caracteristic punctului material, numit *masă*. Newton a definit masa unui corp ca *măsură a cantității de materie conținute în corp*. Cu cît masa unui corp este mai mare, cu atît accelerația, produsă de o

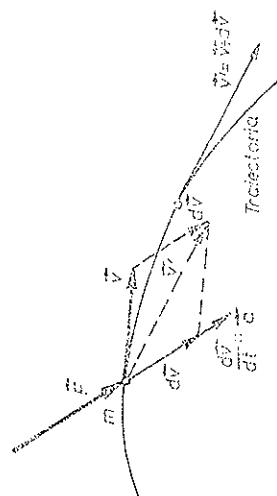


Fig. 2.1

forță dată, este mai mică. De aici rezultă că *masa unui corp este o măsură a inerției sale*, adică o măsură a gradului de opunere sau de reacțiune a corpului la acțiunea forțelor exterioare care îi schimbă starea de repaus sau de mișcare rectilinie uniformă. În această calitate de *măsură a inerției*, masa m se numește *masă inertă* sau *inerțială* și se manifestă deci sub dublu aspect, pasiv și activ: în absența forțelor exterioare corpul își păstrează mișcarea rectilinie uniformă, conform principiului inerției, iar sub acțiunea unei forțe exterioare admite o accelerație invers proporțională cu masa sa inertă, conform principiului fundamental.

Ecuatia (2.1) reprezintă legea fundamentală a dinamicii (legea a doua a lui Newton, 1687).

Observații. 1) Ecuatia $\vec{F} = m\vec{a}$ nu ne spune nimic despre *natura* forței; ea poate fi de natură gravitațională, electromagnetică, nucleară sau în particular, forță elastică, forță de frecare etc.

În ecuația $\vec{F} = m\vec{a}$ forța apare sub formă abstractă ca un *model mecanic* al oricărei interacțiuni a corpurilor, independent de natura fizică a acestei interacțiuni. În moduli acesta, ecuația $\vec{F} = m\vec{a}$, pe lângă caracterul de *lege a naturii*, poartă și caracterul de *definiție dinamică* a forței. De aceea pentru determinarea mișcării unui sistem trebuie cunoscută și *legea forței*, de exemplu, pentru oscilatorul elastic trebuie cunoscută legea lui Hooke, pentru sistemul solar — legea atracției gravitaționale, pentru atom — legea lui Coulomb a interacției electrostatice (mai general, electromagnetice) etc.

2) Experiența arată că principiul fundamental este valabil numai în SR *inertiale*, la fel ca și principiul inerției. Legea fundamentală (2.1) nu se schimbă când trecem de la un SR inerțial la altul, deoarece nici mărimea forței (măsurată cu dinamometrul, deci cu ajutorul riglelor și coșorinelor), nici mărimea accelerației nu se schimbă în acest caz (după cum vom vedea în 2.7).

Vom stabili mai târziu modul în care se scrie legea fundamentală în cazul unui SR *ninerțial* (cap. 10).

3) În *teoria restrânsă a relativității* a lui Einstein (1905) se arată, și experiențele confirmă, că la viteze foarte mari, apropiate de viteza luminii în vid $c = 2,997925 \cdot 10^8$ m/s, masa corpului nu rămâne constantă, ci crește cu viteza după legea:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (2.2)$$

unde m_0 este masa corpului în repaus. Atunci legea fundamentală (2.1) trebuie scrisă corect astfel (așa a scris-o și Newton):

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}. \quad (2.3)$$

Produsul $m\vec{v}$ reprezintă deci o mărime importantă (cantitatea de mișcare sau impulsul punctului material) (fig. 2.2).

Mecanica clasică nu este valabilă nici în domeniul atomic, unde se aplică mecanica *cuantică*.

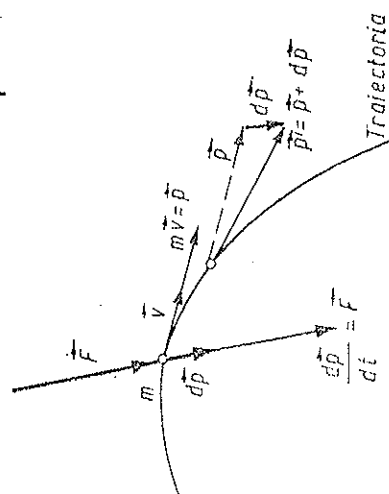


Fig. 2.2

2.5. GREUTATEA ȘI MASA

Greutatea unui corp este *forța* cu care el este atras de Pământ. Static, greutatea se manifestă prin forța cu care corpul apasă pe un plan orizontal sau înținde firul de suspensie. Dinamic, greutatea produce căderea corpului lăsat liber. Experiența arată că în vid, când nu acționează decât forța de greutate, toate corpurile cad (într-un loc dat) cu *aceeași* accelerație g independentă de masa, natura, dimensiunile sau forma corpurilor, deci conform ecuației (2.1):

$$G = mg, \quad g = G/m. \quad (2.4)$$

Această relație este fundamentală pentru *măsurarea* masei, deoarece reduce compararea maselor la compararea *greutăților* lor, într-un același loc:

$$G_1/G_2 = m_1/m_2. \quad (2.5)$$

Măsurarea masei se face cu ajutorul *balanței*.

Unitatea de masă, numită *kilogram*, este egală cu masa prototipului din platină-iridiu păstrat la Biroul Internațional de Măsuri și Greutăți de la Sèvres (Franța).

În SI masa se alege ca mărime fundamentală, forța fiind atunci o mărime derivată. Unitatea de forță rezultă din legea fundamentală:

$$\begin{aligned} [F] = [m][a] \rightarrow [F] &= MLT^{-2} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 = 1 \text{ N în SI} \\ \text{sau } [F] &= 1 \text{ g} \cdot \text{cm/s}^2 = 1 \text{ dyn} = 10^{-5} \text{ N în CGS.} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Unitatea de forță (1 N) este egală cu forța care aplicată unei mase egale cu unitatea (1 kg) îi imprimă o accelerație egală cu unitatea (1 m/s²).

Unitatea *kilogram forță* (kgf) din sistemul tehnic MKFS este egală cu greutatea unui kilogram-masă în cimpul gravitațional normal $g_n = 9,80665 \text{ m/s}^2$ sau, în altă formă, este forța care aplicată unei mase de 1 kg îi imprimă o accelerație egală cu accelerația gravitațională normală $g_n = 9,80665 \text{ m/s}^2$:

$$1 \text{ kgf} = 1 \text{ kg} \cdot 9,80665 \text{ m/s}^2 = 9,80665 \text{ N} \approx 9,8 \text{ N}. \quad (2.7)$$

De aici se vede că într-un cimp gravitațional normal (standard) masa unui corp exprimată în kg coincide *numeric* cu greutatea sa exprimată în kgf, nu însă în alte cimpuri gravitaționale. De exemplu, pe Lună, un corp cu masa de 1 kg are greutatea de 0,165 kgf ($g_L = 1,62 \text{ m/s}^2$), iar pe Soare: 27,8 kgf ($g_S = 271 \text{ m/s}^2$).

Subliniem încă o dată deosebirea dintre greutatea unui corp și masa sa: *Greutatea* unui corp este o *forță*, egală cu forța de atracție exercitată de Pământ. Ea variază cu altitudinea și latitudinea, fiind dependentă de cimpul gravitațional. Greutatea se măsoară cu *dinamometrul*. *Masa* este o mărime *scalară*, o caracteristică internă a corpului, independentă de altitudine și latitudine. Masa se măsoară cu *balanța* (se poate măsura și cu dinamometrul prin metoda *substituției*: se măsoară alungirea produsă de corpul măsurat, apoi se înlocuiește corpul cu mase etalon până se obține *aceeași* alungire). Proprietatea corpurilor de a atrage alte corpuri și de a fi atrase de alte corpuri, exprimată în legea atracției universale a lui Newton (Cap. 8), este cea de-a doua manifestare a masei (alături de inerție). În această calitate

masa se numește *masa grea* sau *gravifică* (sau *gravitațională*) și este o măsură a interacțiunii corpului cu câmpul gravitațional. Datorită *masei gravifice* corpurile creează un câmp gravitațional și suferă acțiunea unui câmp gravitațional; de aceea masa gravifică se mai numește și „sarcină” gravifică, fiind analoagă sarcinii electrice.

Experimentele confirmă cu mare precizie faptul că *cele două proprietăți, inerția și gravitatea, se datoresc unei mărimi unice: masa corpului*, cu alte cuvinte, *masa inertă este egală cu masa gravifică*. Acest fapt stă la baza teoriei generale a relativității (a câmpului gravitațional) a lui Einstein (1916).

În baza acestei egalități, aceeași formulă (2.4) exprimă forța gravitațională static prin masa grea și în același timp dinamic prin masa inertă. Cu ajutorul balanței măsurăm masa grea, deci automat și masa inertă.

2.6. PRINCIPIUL ACȚIUNI ȘI REACȚIUNII (LEX TERTIA)

Experiența arată că acțiunea unui corp asupra altuia poartă totdeauna caracterul unei *interacțiuni*, adică acțiunea unui corp asupra altuia naște simultan o reacțiune a acestuia din urmă asupra primului, — corpurile acționează deci unul asupra celuilalt.

Principiul III afirmă că *fiecărei acțiuni i se opune totdeauna o reacțiune, egală în modul și de sens contrar*, sau, altfel, *acțiunile reciproce a două corpuri (puncte materiale) sînt totdeauna egale în modul și dirijate în sensuri contrare* (legea a treia a lui Newton). Cele două forțe, acțiunea și reacțiunea, sînt aplicate *simultan* și la corpuri *diferite* (de-a lungul dreptei care unește cele două corpuri).

Exemple. În statică: Un corp așezat pe un plan orizontal apasă asupra planului cu greutatea sa, deformîndu-l. Se naște simultan o reacțiune din partea planului, egală în modul și de sens opus, aplicată corpului. În dinamică: dacă tragem accelerat un cărucior cu o forță dată, resușim simultan asupra noastră o reacțiune egală în modul și de sens contrar din partea căruciorului.

Acțiunea și reacțiunea apar nu numai la contactul a două corpuri, ci și în cazul interacțiunii prin intermediul unui câmp. De exemplu, atracția gravitațională reciprocă dintre două corpuri, interacțiunea dintre două corpuri cu sarcini electrice etc.

2.7. TRANSFORMĂRILE LUI GALILEI

Un *eveniment* (de exemplu, ciocnirea a două particule, prezența unei particule clasice într-un anumit loc la un anumit moment etc.) este caracterizat prin *patru* coordonate: locul — prin 3 coordonate spațiale x, y, z și momentul — prin timpul t (coordonata temporală).

Un *același* eveniment sau proces (de exemplu, mișcarea unei particule) poate fi studiat din două SR diferite — vom spune de către doi *observatori* diferiți, fiindcă oricînd putem presupune, fără a restrînge generalitatea, că în fiecare SR se află cîte un observator care studiază evenimentele, și reciproc, de fiecare observator este legat un SR propriu (SC, riglă și ceasornic). Fiecare observator măsoară coordonatele evenimentelor cu instrumentele *sale* (rigla și ceasornicul) și stabilește legile exprimate în aceste coordonate.

Este important de stabilit legătura dintre coordonatele unui eveniment măsurate de diferiți observatori (adică din diferite SR), adică *transformările de coordonate care dau trecerea de la un SR la altul*. Astfel putem vedea care aspecte ale fenomenelor și legilor sînt *relative*, adică dependente de SR și care sînt *absolute* sau *invariante*, adică independente de SR (aceleași pentru toți observatorii).

Vom presupune că riglele și ceasornicele diferitelor observatori sînt *construite și etalonate identic*, adică după aceeași „rețetă” (aceiași procedeu tehnologic).

a) Fie două SR notate cu S și S' (fig. 2.3). Presupunem că S' se mișcă față de S *rectiliniu uniform* cu viteza *constantă* \vec{u} . Din punctul de vedere al observatorului S , aplicînd regula adunării vectoriale, rezultă conform fig. 2.1:

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{OO}' = \vec{r}_0 - \vec{ut},$$

deci

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_0 - \vec{ut}, \quad t' = t - t_0, \quad (2.8)$$

unde toate mărimile sînt măsurate cu instrumentele din S . Dar *nu areasă legătură ne interesează*. Noi vrem să stabilim legătura dintre coordonatele (\vec{r}, t) ale evenimentului P , măsurate de observatorul S cu instrumentele *sale*, și coordonatele (\vec{r}', t') ale aceluiași eveniment dar măsurate de observatorul S' cu *instrumentele sale*. Or, instrumentele (rigla și ceasornicul) din S' se află *în mișcare* față de S ! Dar atunci vectorul $\vec{OP} = \vec{r}$ măsurat de fiecare observator din S și S' cu instrumentele *lui*, va da același rezultat?

În mecanica clasică newtoniană se consideră că *lungimile (distanțele) și duratele (intervalele de timp), măsurate în diferite SR, sînt aceleași*, adică

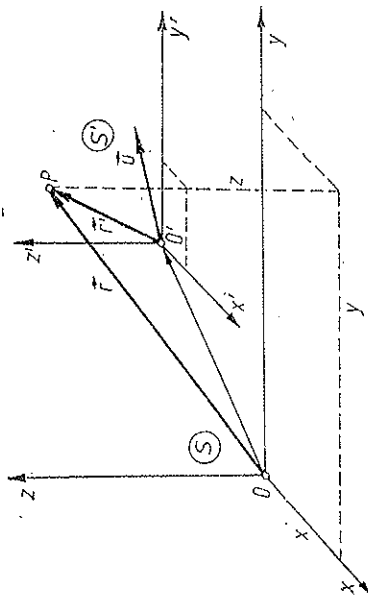


Fig. 2.3

au un caracter *absolut* sau *invariant*, adică rezultatele măsurătorilor de lungime și durată nu depind nici de mișcarea instrumentelor de măsură (rigle și ceasornice), nici de mișcarea obiectelor măsurate.

Această ipoteză este foarte bine verificată în domeniul vitezelor obișnuite (chiar pentru viteze cosmice), dar în domeniul vitezelor foarte mari, apropiate de viteza luminii $c = 3 \cdot 10^8$ m/s (de exemplu, în cazul particulelor elementare), această ipoteză nu mai este exactă și trebuie aplicată *mecanica relativistă*.

Rămânând în cadrul mecanicii clasice, în baza caracterului absolut al lungimilor, riglele din diferite SR (construite și etalonate la fel) vor indica aceeași lungime, dimensiunile unui obiect sau distanța spațială dintre două evenimente va fi aceeași în toate SR. La fel, în baza caracterului absolut al duratelor, ceasornicele din diferite SR (construite și etalonate la fel), vor arăta aceeași durată sau intervale de timp ale proceselor, durata unui proces sau distanța temporală dintre două evenimente va fi aceeași în toate SR. Timpul va curge la fel în toate SR. Evenimente simultane într-un SR vor fi simultane în toate SR (pentru toți observatorii), adică simultaneitatea evenimentelor are caracter absolut sau invariant.

Admițând această ipoteză, putem considera că în relațiile (2.8) toate măsurile fără accent, adică \vec{r} , t , sînt măsurate de observatorul S cu instrumente sale, iar măsurile cu accent, adică \vec{r}' , t' , sînt măsurate de observatorul S' cu instrumentele sale, adică (2.8) ne dau chiar legătura căutată dintre coordonatele unui eveniment P, măsurate în S, și coordonatele aceluiași eveniment P măsurate în S'.

Relațiile (2.8) se numesc transformările lui Galilei; ele dau trecerea de la un SR la altul, mișcat rectiliniu uniform față de primul. Cunoscînd coordonatele (\vec{r}, t) ale unui eveniment, măsurate într-un SR dat (cu instrumentele din acest SR), putem calcula coordonatele (\vec{r}', t') ale acestui eveniment, măsurate în oricare alt SR, în mișcare rectilinie uniformă față de cel dat.

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v}_0 + \vec{w}(t' + t_0), \quad t = t' + t_0, \quad (2.9)$$

diferențindu-le:

$$d\vec{r} = d\vec{r}' + \vec{w}dt', \quad dt = dt' \quad (2.10)$$

și împărțindu-le membru la membru:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}' + \vec{w}dt'}{dt'} = \frac{d\vec{r}'}{dt'} + \vec{w},$$

găsim legea clasică de compunere (sau de transformare) a vitezelor:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{w}, \quad (2.11)$$

adică viteza \vec{v} , față de S, este egală cu viteza „relativă” \vec{v}' , față de S', plus viteza de „transport” \vec{w} a sistemului S' față de S.

c) Diferențind relațiile (2.11) și împărțindu-le la $dt = dt'$, obținem legea de compunere (sau de transformare) a accelerațiilor:

$$d\vec{w} = d\vec{v}', \quad (d\vec{w} = 0), \quad dt = dt',$$

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt'}, \quad \vec{a} = \vec{a}', \quad (2.12)$$

adică accelerația este aceeași în toate sistemele de referință care se mișcă rectiliniu uniform ($\vec{w} = \text{const}$) unele față de altele, adică accelerația este invariantă față de sistemele de referință aflate în translație relativă uniformă.

Dacă accelerația este nulă într-un sistem S, adică particula este în repaus sau se mișcă rectiliniu uniform față de S, atunci accelerația va fi nulă în oricare alt sistem S' mișcat rectiliniu uniform față de primul, adică particula va fi în repaus sau în mișcare rectilinie uniformă în toate aceste sisteme de referință aflate în translație uniformă unele față de altele.

Dacă acum principiul inerției este valabil față de un SR, deci acesta este *inercial*, atunci acest principiu va fi valabil în toate SR aflate în translație uniformă față de primul, care vor fi de asemenea inerțiale (și sigur *nu* va fi valabil față de SR *accelerate* față de primul), deci avem o familie de SR inerțiale care se mișcă unele față de altele rectiliniu uniform.

Reciproc, dacă două SR sînt inerțiale, atunci ele se află în translație uniformă unul față de celălalt, altfel invarianța accelerației (2.12) ar fi violată ($\vec{a} \neq \text{const}$; $d\vec{w}/dt \neq 0$) și $\vec{a} = 0$ într-un sistem n-ar implica $\vec{a}' = 0$ în celălalt sistem.

2.8. PRINCIPIUL RELATIVITĂȚII (DIN MECANICA CLASICĂ)

Cele trei principii ale mecanicii sau legi ale lui Newton sînt *suficiente* pentru a clădi întregul edificiu al mecanicii clasice cu toate legile sale.

Primul principiu (al inerției) este valabil în toate SR inerțiale, deoarece este chiar folosit pentru a defini aceste sisteme.

Al doilea principiu (al acțiunii forței) este de asemenea valabil în toate SR inerțiale. În adevăr, pe de o parte, accelerația este aceeași (invariantă) față de toate SR inerțiale, după cum am arătat, iar masa se consideră *constantă* în mecanica clasică newtoniană, deci $m\vec{a}$ este invariant. Pe de altă parte, măsurarea forței cu dinamometrul se reduce la măsurarea *alungirii* unui resort, adică la măsurarea simultană a coordonatelor capetelor resortului, ceea ce, în virtutea caracterului absolut al lungimilor și duratelor (în particular, a simultaneității), va conduce la același rezultat pentru forță în diferite SR, deci ecuația fundamentală a dinamicii $\vec{F} = m\vec{a}$, este aceeași în toate SR inerțiale.

În sfîrșit, al treilea principiu (al acțiunii și reacțiunii) este și el valabil în toate SR inerțiale.

Principiile mecanicii newtoniene fiind aceleași în toate SR inerțiale, rezultă că toate legile mecanicii (care sînt consecințe ale principiilor) sînt *aceleași în orice SR inerțiale*.

Acasta este conținutul principiului relativității în mecanică, găsit încă de Galilei (1632).

Folosind transformările Galilei, putem enunța principiul relativității astfel:

Legile mecanicii clasice newtoniene sînt invariante la transformările Galilei, pe scurt, sînt Galilei-invariante sau G-invariante.

De aici rezultă că din punct de vedere mecanic toate SR inerțiale sînt *absolute echivalente*; nici un SR inerțial nu poate fi considerat fix sau absolut, toate sînt egal îndreptățite.

Prin urmare, nici o experiență mecanică efectuată în interiorul unui laborator inerțial nu ne permite să determinăm mișcarea sa rectilinie uniformă față de stelele fixe (față de alte SR inerțiale). De exemplu, nici o experiență mecanică efectuată într-o cabină închisă a unui vapor sau avion, aflat în mișcare rectilinie uniformă față de Pămînt, nu ne permite să determinăm mișcarea acestui vapor sau avion. Într-adevăr, nu ne putem da seama dacă vaporul (trenul) merge rectiliniu uniform sau stă pe loc, deoarece toată activitatea noastră decurge absolut la fel în cele două cazuri. Lucrurile se schimbă radical într-un SR *neinerțial*. În acest caz legile lui Newton nu mai sînt valabile și cu

ajutorul experiențelor mecanice efectuate în interiorul sistemului (pe baza abaterilor de la legile lui Newton) putem determina accelerația acestuia, de exemplu rotația sa, față de SR inerțiale (față de stele). Astfel se poate dovedi cu ajutorul experiențelor mecanice efectuate într-un laborator pe Pământ, că Pământul se rotește (abateri în căderea liberă a corpurilor, rotația planului de oscilație a unui pendul).

Principiul relativității din mecanică a fost extins de A. Einstein (1905) la *întreaga fizică*. Astfel, toate legile *fizicii* (mecanice, electromagnetice, optice, nucleare etc.) sînt aceleași în toate SR inerțiale, sau altfel, nici o experiență de *fizică* efectuată în interiorul unui laborator inerțial nu ne permite să determinăm mișcarea rectilinie uniformă a acestuia față de alte laboratoare inerțiale (față de stele și nebuloase îndepărtate).

Trebuie observat că spre deosebire de mecanica clasică newtoniană, în mecanica relativistă lungimile și duratele se schimbă atunci cînd trecem de la un SR inerțial la altul (construcția lungimilor și dilatarea duratelor), de aceea se obțin *alte transformări de coordonate* (*transformările Lorentz*) în locul transformărilor Galilei (v. cap. 11).

PROBLEMĂ

Să se considere cazul particular al transformărilor Galilei cînd sistemele S, S' au axe paralele, se mișcă de-a lungul axei comune Ox și la $t = t' = 0$ originea lor coincidau (fig. 2.4).

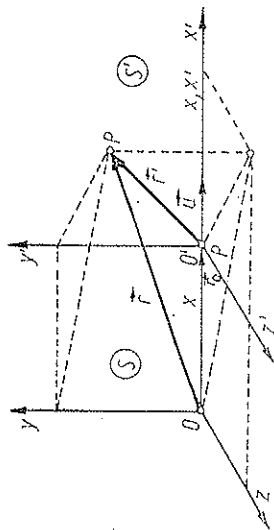


Fig. 2.4

$$\text{R. } \vec{r}' = \vec{r} - \vec{ut}, \quad t' = t \text{ și reciproc: } \vec{r} = \vec{r}' + \vec{ut}', \quad t = t' \quad (2.13)$$

sau pe componente:

$$\begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} x = x' + ut' \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases} \quad (2.14)$$

de unde compunerea vitezelor:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u} \text{ sau } v_x = v'_x + u, \quad v_y = v'_y, \quad v_z = v'_z \quad (2.15)$$

și invarianta accelerăției:

$$\vec{a} = \vec{a}', \text{ sau } a_x = a'_x, \quad a_y = a'_y, \quad a_z = a'_z. \quad (2.16)$$

CAPITOLUL 3

DINAMICA PUNCTULUI MATERIAL

Din legea fundamentală a mecanicii $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$ rezultă trei teoreme: a impulsului (sau cantității de mișcare), a momentului cinetic și a energiei cinetice. Aceste trei teoreme sînt valabile atît în mecanica clasică, cît și în mecanica relativistă, cu deosebirea că în mecanica clasică masa se consideră constantă, iar în mecanica relativistă masa crește cu viteza după legea (2.2) și de aceea expresia energiei *cinetice* este alta.

3.1. TEOREMA IMPULSULUI

Legea fundamentală a mecanicii:

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad \vec{p} \stackrel{\text{def}}{=} m\vec{v}, \quad (3.1)$$

unde $\vec{p} = m\vec{v}$ este impulsul punctului material (cantitatea de mișcare), afirmăm că *forța aplicată punctului material este egală cu derivata impulsului punctului material în raport cu timpul*.

Din ecuația (3.1) rezultă

$$\vec{F} dt = d(m\vec{v}) = d\vec{p}, \quad (3.2)$$

$$\vec{H} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta\vec{p} = \Delta(m\vec{v}) = m_2\vec{v}_2 - m_1\vec{v}_1. \quad (3.3)$$

În mecanica nerelativistă masa este constantă, de aceea (3.3) devine:

$$\vec{H} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1. \quad (3.4)$$

Integrala \vec{H} se numește *impulsul forței* (în teoria ciocnirilor se mai numește *percuție*). Ecuația (3.3) exprimă teorema impulsului.

Teorema impulsului : *Impulsul forței rezultante aplicate punctului material este egal cu variația impulsului punctului material.*

Dacă rezultanta forțelor aplicate este permanent nulă, impulsul punctului material se conservă, adică punctul material rămâne în repaus sau în mișcare rectilinie uniformă. Un punct material nu-și poate schimba de la sine impulsul său (măsura mișcării mecanice), ci numai sub acțiunea unei forțe aplicate lui.

Conform principiului III, forța \vec{F} este efectul *interacțiunii* punctului material cu alte corpuri, asupra cărora se exercită acțiunea $\vec{F}' = -\vec{F}$ din partea punctului material. Putem astfel scrie

$$-\vec{F}' = \vec{F} \rightarrow -\int \vec{F}' dt = \int \vec{F} dt = \Delta \vec{p}. \quad (3.5)$$

prin urmare, creșterea vectorială a impulsului punctului material se obține pe seama scăderii corespunzătoare a impulsului corpurilor care au acționat asupra sa. Avem deci un *transfer* de impuls de la un corp la altul, realizat prin intermediul forței, în procesul interacțiunii. Impulsul este o *măsură* vectorială (de tip spațial) a mișcării (din punctul de vedere al translației spațiale). Teorema impulsului exprimă o lege de conservare a mișcării materiei. Existența mărimii fizice impuls și a legii fizice de conservare a impulsului este legată de proprietatea de *omogenitate* a spațiului (simetria la translații). Impulsul se măsoară în $N \cdot s = kg \cdot m/s$ (în SI) sau $dyn \cdot s = g \cdot cm/s$ (în CGS).

În procesele de ciocniri, unde apar forțe puternice în intervale scurte de timp, impulsul forței se mai numește uneori *percuție* (sau *percușiune*).

3.2. MOMENTUL FORȚEI. MOMENTUL CINETIC

Dacă un rigid are un punct fix (o articulație) în jurul căruia se poate roti liber, atunci aplicând o forță rigidului, el se va roti în jurul unei axe trecând prin articulație, perpendiculară pe planul definit de articulație și forță (fig. 3.1). Efectul este același, oriunde am aplica forța pe suportul său (de exemplu, prin intermediul unui fir lung). Dacă suportul forței trece prin articulație, rigidul evident nu se rotește. Efectul de rotație este determinat de forță și de distanța suportului său până la articulație (*brațul forței*). Ținând seama de direcția axei și sensul rotației, putem spune că efectul de rotație este dat de **momentul forței față de polul O, definit prin produsul vectorial:**

$$\vec{M} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{r} \times \vec{F}; \quad M = rF \sin \alpha = Fb, \quad (3.6)$$

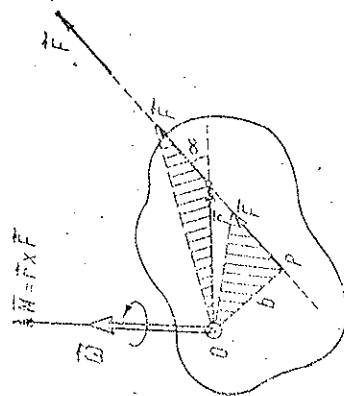


Fig. 3.1

unde \vec{r} este vectorul de poziție al punctului de aplicare al forței, iar $b = b_{\perp}$ — *brațul forței*, adică distanța de la pol la dreapta de acțiune a forței (fig. 3.1) (Ch. Huygens 1693, L. J. Lagrange 1793). Momentul forței se măsoară în $N \cdot m$.

Momentul forței este numeric egal (ca la orice produs vectorial) cu aria paralelogramului construit pe cei doi vectori (\vec{r}, \vec{F}) sau cu dublul ariei triunghiului construit din O pe \vec{F} . Momentul nu se schimbă dacă forța *învecă* pe suportul său.

Dacă rigidul are o axă fixă în jurul căreia se poate roti liber, atunci o forță paralelă cu axa de rotație sau concurentă cu aceasta nu produce rotație. Efectul de rotație este produs numai de componenta *transversală* (pe axă) a forței, înmulțită cu brațul ei, adică de **momentul forței în raport cu axa** (fig. 3.2):

$$M_{||} \stackrel{\text{def}}{=} F_{\perp} b. \quad (3.7)$$

Acesta este egal totodată cu proiecția pe axă a vectorului moment $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ față de un pol de pe axă:

$$M_{||} = \vec{e} \cdot \vec{M} = \vec{e} \cdot (\vec{r} \times \vec{F}) = \vec{e} \cdot (\vec{b} \times \vec{F}_{\perp}), \quad \vec{e} - \text{versorul axei}. \quad (3.8)$$

Cealaltă componentă M_{\perp} tinde să rotească doar axa de rotație.

La fel ca mai sus se definește **momentul oricărui vector**, de exemplu, *momentul impulsului*, numit **moment cinetic** (sau **moment unghiular**) (fig. 3.3):

$$\vec{L} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}. \quad (3.9)$$

Momentul cinetic se măsoară în J.s (sau erg.s).

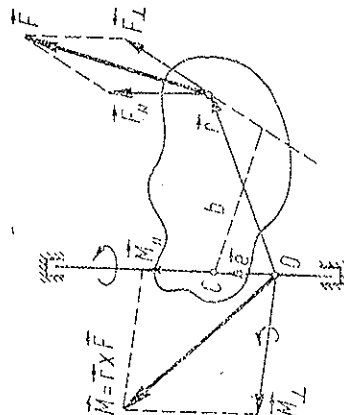


Fig. 3.2

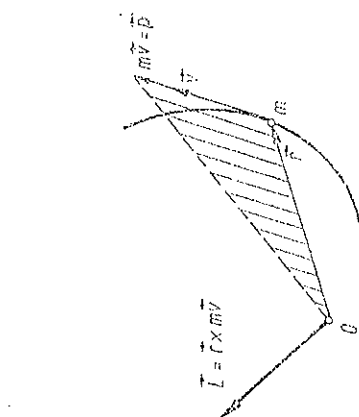


Fig. 3.3

3.3. TEOREMA MOMENTULUI CINETIC

Derivând relația (3.9) în raport cu timpul și înlocuind derivata impulsului prin forță, conform ecuației fundamentale (3.1), obținem

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M},$$

deoarece $\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times m\vec{v} = 0$, fiind vectori paraleli, deci

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{L}}{dt} = \dot{\vec{L}}, \quad \vec{M} = \dot{\vec{L}}, \quad (3.10)$$

Momentul forței este egal cu derivata momentului cinetic în raport cu timpul. Momentul forței și momentul cinetic se consideră față de același punct (pol) fix (într-un SR inerțial).

Analog ca la teorema impulsului obținem teorema momentului cinetic:

$$\vec{K} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{r} \times d\vec{H} = \Delta\vec{L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1, \quad (3.11)$$

adică *impulsul momentului (sau momentul impulsului) forței aplicate punctului material este egal cu variația momentului cinetic al punctului material.*

Dacă momentul forței rezultante este permanent nul, momentul cinetic al punctului material se conservă: un punct material nu-și poate schimba momentul său cinetic decât sub acțiunea unui moment al forței.

Exemple. a) În mișcarea rectilinie uniformă $\vec{F} = 0$, $\vec{M} = 0$, deci impulsul \vec{F} se conservă și momentul cinetic \vec{L} față de orice pol se conservă (fig. 3.4). Aceasta rezultă și direct, căci momentul unui vector nu se schimbă dacă vectorul ($m\vec{v} = \text{const}$) *lucește* pe suportul său.

b) În mișcarea circulară uniformă forța este centripetă, trece permanent prin centrul cercului, deci momentul ei față de acest centru este permanent zero (fig. 3.5). Atunci momentul cinetic al particulei față de centrul cercului se conservă (fig. 3.6). Acest lucru se găsește și direct căci $|\vec{L}| = |\vec{r} \times m\vec{v}| = rmv = mr^2\omega = \text{const}$ (fiindcă $v = r\omega = \text{const}$, $\omega = \text{const}$), iar direcția și sensul lui \vec{L} de asemenea se conservă: $\vec{L} = mr^2\omega$ este perpendicular pe planul cercului (fig. 3.6).

c) În mișcarea unei planete în jurul Soarelui, forța asupra planetei trece permanent prin centrul Soarelui (forța de atracție gravitațională), deci momentul ei față de Soare este permanent zero și atunci *momentul cinetic al planetei față de Soare se conservă*, deși orbita nu este în general circulară, ci *eliptică*. Soarele aflându-se într-unul din focarele elipsei (fig. 3.7).

Momentul cinetic definit mai sus se mai numește și *moment cinetic orbital* sau extern, deoarece este legat de mișcarea particulei pe o orbită (traietorie), spre deosebire de momentul cinetic *propriu* sau intern, numit și spin la particule elementare.

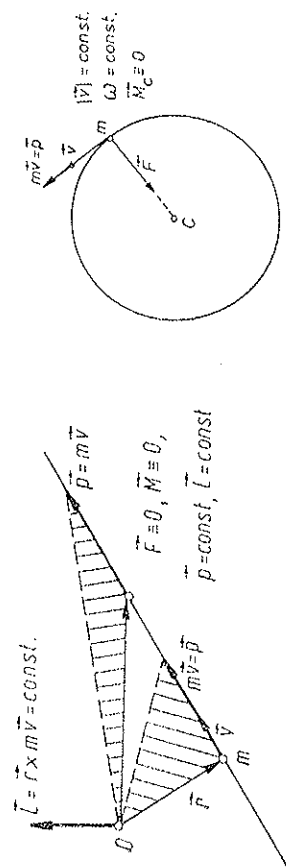


Fig. 3.4

Fig. 3.5

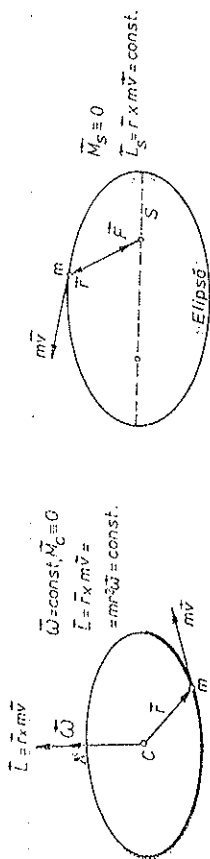


Fig. 3.6

Fig. 3.7

Momentul cinetic este și el o măsură a mișcării (din punctul de vedere al rotației): Teorema momentului cinetic exprimă o lege de conservare a mișcării mecanice, *transmise* de la un corp la altul prin intermediul forței în procesul interacțiunii. Existența mărimii fizice moment cinetic și a legii fizice de conservare a momentului cinetic este legată de proprietatea de *izotropie* a spațiului (simetria la rotații).

Observație. În mecanica *clasică* se arată, și experiența confirmă, că în domeniul *atomic* se manifestă caracterul discret, cuantificat al momentului cinetic:

$$L = l\hbar, \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,0545 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \quad (\hbar - \text{constanta Planck}). \quad (3.12)$$

Spinul poate avea și valori semintregi (multipli de $\hbar/2$).

3.4. LUCRUL MECANIC. PUTEREA

3.4.1. LUCRUL MECANIC

Forțele pot produce deplasări ale corpurilor pe o direcție oarecare. O măsură a efectului *util* al forței în acest proces este dată de *lucrul mecanic*, definit prin *produsul dintre deplasare și componenta forței pe direcția deplasării*, deoarece componenta normală a forței nu poate contribui la deplasarea dată (fapt observat încă de Euler) (fig. 3.8). Astfel, *lucrul mecanic este definit prin produsul scalar dintre forța care acționează asupra punctului material și deplasare*:

$$\begin{aligned} dW &\stackrel{\text{def}}{=} \vec{F} d\vec{r} = \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad W \stackrel{\text{def}}{=} \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = \\ &= \int (F_x v_x + F_y v_y + F_z v_z) dt, \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$d\vec{r} = d(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz.$$

În cazul forței *constante* (fig. 3.9):

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = Fd \cos(\vec{F}, \vec{d}), \quad \vec{F} = \text{const.} \quad (3.14)$$



Fig. 3.3

Dacă forța este tot timpul perpendiculară pe direcția deplasării, lucrul mecanic efectuat de forță este nul. Prin urmare, într-o mișcare curbilinie numai componenta *tangentială* a forței efectuează lucru mecanic, și nu componenta normală.

Pentru unitatea de lucru mecanic rezultă:

$$[W] = [F][d] = L^2MT^{-2} = 1\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2 = 1\text{J în SI} \quad (3.15)$$

sau $[W] = 1\text{g} \cdot \text{cm}^2/\text{s}^2 = 1\text{erg} = 10^{-7}\text{J în CGS.} \quad (3.16)$

Unitatea de lucru mecanic (1J) este egală cu lucrul mecanic efectuat de o forță unitate (1N) pe un drum egal cu unitatea (1m) în direcția forței. O unitate des folosită este kilowattora:

$$1\text{kWh} \equiv 1\text{kW} \cdot 1\text{h} = 3,6 \cdot 10^6\text{J.} \quad (3.17)$$

3.4.2. PUTEREA

Același lucru mecanic poate fi efectuat în diferite intervale de timp. Definim *puterea medie* în intervalul de timp Δt prin raportul dintre lucrul mecanic W efectuat în acest interval și intervalul Δt :

$$\bar{P} = \frac{W}{\Delta t} \quad (3.18)$$

și puterea instantanee sau momentană:

$$P \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} \quad (3.19)$$

Dacă lucrul mecanic este efectuat uniform, limita din (3.19) coincide cu raportul (3.18). Ținând seama de (3.13), rezultă

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \vec{v}, \quad (3.20)$$

adică *puterea dezvoltată de o forță este egală cu produsul scalar dintre forță și viteză*.

Pentru unitatea de putere rezultă:

$$[P] = [W][t] = L^2MT^{-3} = 1\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3 = 1\text{W} = 1\text{J/s în SI} \quad (3.21)$$

sau $[P] = 1\text{g} \cdot \text{cm}^2/\text{s}^3 = 1\text{erg/s în CGS.}$

În sistemul MKFS:

$$[P] = 1\text{kcal/s} = 1\text{kcal} \cdot \text{m/s} = 9,80665\text{ W.} \quad (3.22)$$

În sfârșit, o unitate tolerată este calei putere:

$$1\text{CP} = 75\text{kcal/s} = 736\text{ W.} \quad (3.23)$$

3.5. TEOREMA ENERGIEI CINETICE

Înmulțind ecuația (3.1) scalar cu $d\vec{r} = \vec{v}dt$, obținem

$$dW = \vec{F}d\vec{r} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \vec{v}dt = \vec{v}d(m\vec{v}) = \vec{v}^2 dm + m\vec{v}d\vec{v} = v^2 dm + mv dv, \quad (3.24)$$

unde $\vec{v}^2 = \vec{v} \vec{v} = v^2$, care prin diferențiere dă $\vec{v} d\vec{v} = v dv$.

Spre deosebire de celelalte două teoreme, nu putem înainta aici mai departe fără a cunoaște concret dependența masei de viteză. În mecanica clasică $m = \text{const}$, astfel încât

$$dW = \vec{F}d\vec{r} = mv dv = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = dE_c, \quad m = \text{const}, \quad (3.25)$$

$$W = \int_1^2 \vec{F}d\vec{r} = \Delta E_c = E_2 - E_1, \quad (3.26)$$

unde

$$E_c \equiv \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}, \quad m = \text{const}, \quad (3.27)$$

se numește *energie cinetică* a punctului material (în mecanica relativistă se obține o altă expresie pentru energie cinetică).

Teorema energiei cinetice. *Lucrul mecanic efectuat de forța rezultantă, aplicată punctului material, este egal cu variația energiei cinetice a punctului material.*

Dacă rezultanta forțelor aplicate este permanent nulă, energia cinetică a punctului material se conservă: un punct material nu-și poate modifica energia sa cinetică decât sub acțiunea unei forțe aplicate asupra lui.

Energia cinetică este egală cu lucrul mecanic cheltuit pentru a aduce particula din repaus până la viteza v sau altfel spus, cu lucrul mecanic necesar

pentru a opri particula sau, în fine, cu lucrul mecanic restituit de particulă la oprirea sa.

Energia cinetică este o *măsură* scalară (de tip temporal) a mișcării. Existența mărimii fizice energie cinetică și a legii fizice de conservare a energiei cinetice este legată de proprietatea de omogenitate a timpului (simetria la translații temporale).

Mișcarea mecanică se transmite de la un corp la altul în procesul *interacțiunii* lor prin intermediul forței. Impulsul forței $\vec{H} = \int_1^2 \vec{F} dt$, impulsul momentului forței $\vec{K} = \int_1^2 \vec{M} dt = \int_1^2 (\vec{r} \times \vec{F}) dt$ și lucrul mecanic al forței $W = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r}$ măsoară cantitativ mișcarea mecanică transmisă, fiind egale respectiv cu variația cantității de mișcare $\vec{p} = m\vec{v}$, a momentului cinetic $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$ și a energiei cinetice $E_c = mv^2/2$ a punctului material.

Impulsul ca măsură a mișcării a fost introdus în mecanică de Descartes (1644), iar energia cinetică (de fapt „forța vie” mv^2) de Leibniz (1686). Observăm că *există* în general o funcție $L(\vec{r}, \vec{v})$ (Lagrange), astfel încât impulsul și energia particulei se exprimă astfel:

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \text{grad}_{\vec{v}} L, \quad E = \vec{p} \vec{v} - L, \quad (3.28)$$

unde pentru particula *liberă*:

$$L = mv^2/2 = E_c, \quad \text{dacă } m = \text{const} \quad (3.29)$$

(în mecanica relativistă expresia lagrangeanului este alta).

3.6. ENERGIA POTENȚIALĂ

Fie punctul material într-un câmp de forțe $\vec{F}(\vec{r})$. Există câmpuri de forțe, numite *conservative*, de exemplu, câmpul gravitațional sau câmpul electrostatic, pentru care lucrul mecanic efectuat de forțele câmpului asupra punctului material *nu depinde* de traiectorie sau de viteza punctului, ci numai de pozițiile inițială și finală. Atunci lucrul mecanic efectuat de câmp asupra punctului material pe o traiectorie *închisă* este *nul* (fig. 3.10):

$$\begin{aligned} W_{1c2} &= W_{2c1}, & W_{1c2} - W_{2c1} &= 0, & W_{1c2} + W_{2c1} &= 0, \\ W_{1c2} &= 0 & \text{sau} & \oint \vec{F} d\vec{r} &= 0. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Reciproc, se poate lua această proprietate drept definiție a câmpului conservativ:

Un câmp de forțe este conservativ dacă lucrul mecanic efectuat de forțele câmpului asupra punctului material este zero pe un drum închis.

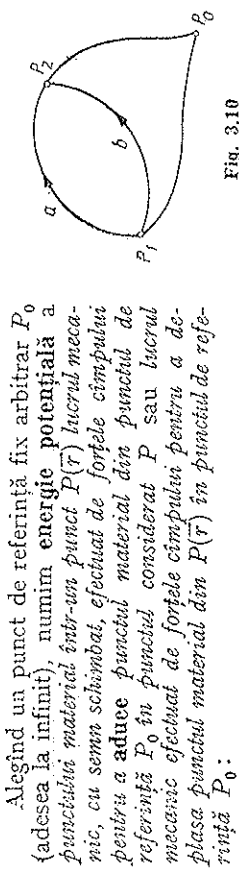


Fig. 3.10

$$U(\vec{r}) \stackrel{\text{def}}{=} - \int_{P_0}^{\vec{r}} \vec{F} d\vec{r} = + \int_{\vec{r}}^{P_0} \vec{F} d\vec{r}, \quad dU \stackrel{\text{def}}{=} - \vec{F} d\vec{r}. \quad (3.31)$$

Atunci lucrul mecanic efectuat de câmp între două puncte $P_{1,2}$ va fi egal cu minus variația energiei potențiale între acele puncte:

$$W = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^0 \vec{F} d\vec{r} + \int_0^2 \vec{F} d\vec{r} = U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2) = -\Delta U, \quad (3.32)$$

ceea ce se obține și direct prin integrarea relației $\vec{F} d\vec{r} = -dU$.

Invers, cunoscând energia potențială $U(\vec{r})$ putem calcula prin *derivare* forțele (forțele derivă din energie potențială, precum câmpul din potențial):

$$\begin{aligned} -dU &= \vec{F} d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz, & dU &= \frac{\partial U}{\partial x} dx + \\ &+ \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = \text{grad } U \cdot d\vec{r}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$F_x = - \frac{\partial U}{\partial x} = - \partial_x U, \quad F_y = - \frac{\partial U}{\partial y} = - \partial_y U, \quad F_z = - \frac{\partial U}{\partial z} = - \partial_z U,$$

$$\vec{F} = - \text{grad } U = - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}},$$

adică *forța este gradientul cu semn schimbat al energiei potențiale* (gradientul unui scalar este un vector ale cărui componente sînt derivatele parțiale ale scalarului).

Suprafețele pe care $U = \text{const}$ se numesc *suprafețe echipotențiale*.

Dacă ne deplasăm pe o astfel de suprafață $dU = 0$, dar $dU = -dW = -\vec{F} d\vec{r}$, deci $dW = 0$ și $\vec{F} \perp d\vec{r}$, adică lucrul mecanic este nul, iar *forța \vec{F} este perpendiculară pe suprafețele echipotențiale și îndreptată în sensul descreșterii energiei potențiale* (fig. 3.11). (Gradientul unui scalar este totdeauna perpendicular pe

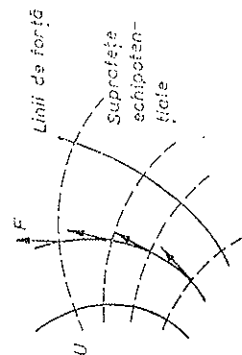


Fig. 3.11

suprafețele pe care scalarul este constant și îndreptat în sensul creșterii scalarului.)

Liniiile de forță sînt curbile de-a lungul cărora vectorul forță este tangent; ele sînt normale pe suprafețele echipotențiale.

3.7. CONSERVAREA ENERGIEI MECANICE

Să considerăm mișcarea particulei într-un câmp de forțe conservativ. Atunci, aplicînd teorema energiei cinetice (3.26), obținem

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \Delta E_c = E_{c2} - E_{c1} = -\Delta U = U_1 - U_2, \quad (\text{fiindcă } W = -\Delta U),$$

$$\Delta E_c + \Delta U = \Delta(E_c + U) = 0, \quad E_c + U = E = \text{const}, \quad (3.34)$$

$$E_{c1} + U_1 = E_{c2} + U_2 = E = \text{const}.$$

Aceasta este **teorema conservării energiei mecanice**, adică a energiei cinetice și potențiale:

Într-un câmp de forțe conservativ are loc în timpul mișcării o transformare reciprocă a energiei cinetice și potențiale, suma lor rămînînd constantă.

Pentru un câmp de forțe neconservativ (disipativ), cînd lucrul mecanic depinde de traiectorie și de modul de mișcare, nu există energie potențială, și atunci energia mecanică (cinetică) nu se conservă, ci se transformă în alte forme de energie nemecanice. De exemplu, în cazul forțelor de frecare, cînd lucrul mecanic depinde de lungimea drumului și nu este nul pe un drum închis, energia mecanică se transformă în căldură (se disipează în mediu trecînd în energie internă).

Să presupunem acum că punctul material se află într-un câmp de forțe conservativ $\vec{F}(\vec{r})$ care derivă deci dintr-un potențial $U(\vec{r})$, și este supus în același timp la o forță neconservativă (disipativă) \vec{F}' . Aplicînd din nou teorema energiei cinetice (3.26), obținem acum

$$W = \int (\vec{F} + \vec{F}') \cdot d\vec{r} = \Delta E_c = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int \vec{F}' \cdot d\vec{r} = -\Delta U + W', \quad (3.35)$$

$$W' = \int \vec{F}' \cdot d\vec{r} = \Delta(E_c + U).$$

Lucrul mecanic al forțelor neconservative (disipative) aplicate punctului material este egal cu variația energiei mecanice a punctului material.

De exemplu, lucrul mecanic al forțelor de frecare, care este totdeauna negativ, deoarece forțele de frecare sînt dirijate în sens contrar mișcării, produce o scădere a energiei mecanice, transformînd-o în căldură.

Exemple. a) *Cazul unidimensional.* Fie cazul cînd energia potențială depinde de o singură coordonată (de exemplu, distanța pînă la un centru al forțelor) (fig. 3.12). În absența forțelor disipative (neconservative), energia mecanică totală $E = E_c + U$ se conservă și energia cinetică

se obține ca diferența $E_c = E - U$. În fig. 3.12, în cazul energiei totale $E = \overline{PM}$ avem: $U = \overline{PN}$ și $E_c = \overline{NM}$. Deoarece totdeauna $E_c \geq 0$, punctul material se poate mișca fie numai în „groapa de potențial” AGB ($s_1 \leq s \leq s_2$) din care nu poate ieși, fie în regiunea de la C la infinit ($s \geq s_3$) și nu poate escalada „bariera de potențial” BTC .

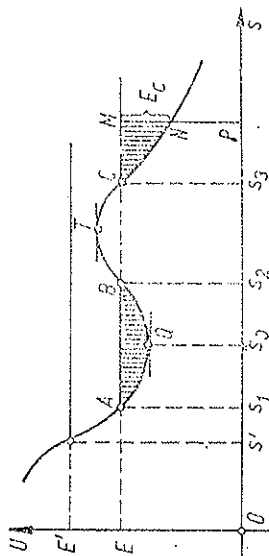


Fig. 3.12

În punctele unde energia potențială U are extreme, derivatele ei, deci forțele (v. 3.35) se anulează și punctul material așezat în repaus în aceste puncte va fi în echilibru. În cazul anihilării energiei potențiale, echilibrul este stabil, deoarece la o deplasare a mobilului, U ar crește și E_c ar deveni negativă (deci viteza imaginărilor!) (în fig. 3.12 poziția $Q(s_0)$). Dacă i se imprimă mobilului o viteză mică, el va oscila tot timpul în jurul poziției de echilibru stabil, spre deosebire de cazul maximumului lui U , cînd mobilul se va depărta de poziția de echilibru instabil (fig. 3.12, poziția T). (L. J. Lagrange 1788, G. L. Dirichlet 1846.)

Dacă există frecări, energia mecanică va scădea și oscilațiile particulei se vor amortiza.

b) Pentru *cîmpul gravitațional terestru* în apropierea suprafeței Pămîntului, lucrul mecanic efectuat de forța de greutate $m\vec{g}$ între două puncte P_1, P_2 depinde numai de diferența de nivel, astfel încît (fig. 3.13):

$$U = - \int_0^z (-mg) dz = mgz. \quad (3.36)$$

Suprafețele echipotențiale sînt plane orizontale, liniile de forță sînt drepte verticale și forța $m\vec{g}$ este îndreptată în jos, în sensul descreșterii energiei potențiale U :

$$F_x = -\partial_x U = 0, \quad F_y = -\partial_y U = 0, \quad F_z = -\partial_z U = -mg. \quad (3.37)$$

Dacă avem o suprafață netedă, fără frecare, cu profilul ca în fig. 3.12, atunci energia potențială a unui punct material aflat pe această suprafață în cîmpul gravitațional terestru va fi dată de aceeași curbă $U \sim z$, dacă s măsorează distanța pe orizontală. De aceea mișcarea unei particule (sănuțe) pe această suprafață în cîmpul gravitațional terestru va ilustra perfect mișcarea particulei în cîmpul considerat $U(s)$.

De aici provin și denumirile: „groapă” de potențial, „barieră” de potențial, a „escalada”, efect „tunel” etc. Observăm că în mecanica *clasică*, spre deosebire de mecanica *clasică*, există o probabilitate nenulă ca particula să treacă prin bariera de potențial BTC din fig. 3.12 (efect „tunel”).

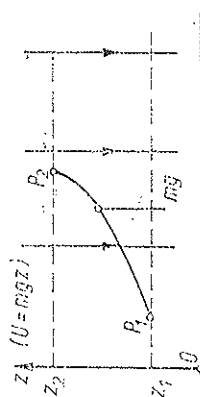


Fig. 3.13

3.8. FORȚELE DE FRECARE

La contactul dintre două solide apar *forțe de frecare*. Ele se datoresc întrepătrunderii asperităților și neregularităților microscopice ale celor două suprafețe care se ating. În planul de contact există, desigur, două forțe de frecare: acțiunea și reacțiunea, egale în modul și de sens opus, una acționează asupra unui corp, iar cealaltă asupra celuilalt corp. Chiar înainte de a începe alunecarea apar forțe de frecare între solide, numite forțe de *frecare statică* sau de *aderență*. În cazul alunecării ele se numesc forțe de *frecare cinetică* sau de *frecare la alunecare*.

Pentru a deplasa un obiect pe podea, de exemplu, un dulap, trebuie să împingem obiectul cu o anumită forță minimă, necesară pentru a-l urni din loc, adică pentru a învinge înțepenirea (aderența) inițială, de repaus. Există deci o forță de frecare statică sau de *aderență, maximă, f_s* . Dar, odată corpul urnit din loc, este necesară o forță *mai mică* pentru a-l menține în mișcare de alunecare, pe podea, adică pentru a învinge forța de frecare cinetică sau la alunecare, $f_c < f_s$ (fig. 3.14).

a) Experimentele conduc la următoarele două legi ale frecării:

1. *Forța maximă de aderență f_s și forța de frecare la alunecare f_c între două corpuri nu depind de aria suprafeței de contact dintre corpuri.*

2. *Forța maximă de aderență f_s și forța de frecare la alunecare f_c sînt proporționale cu forța de apăsare normală N , care se exercită între corpuri la suprafața lor de contact:*

$$f_s = \mu_s N, \quad f_c = \mu_c N, \quad f_s > f_c, \quad \mu_s > \mu_c \quad (3.38)$$

unde μ_s este coeficientul de aderență, iar μ_c este coeficientul de frecare la alunecare.

Acești coeficienți de frecare nu depind de aria suprafeței de contact dintre cele două corpuri (nelubrificate), ci de natura materialelor și felul prelucrării supra-

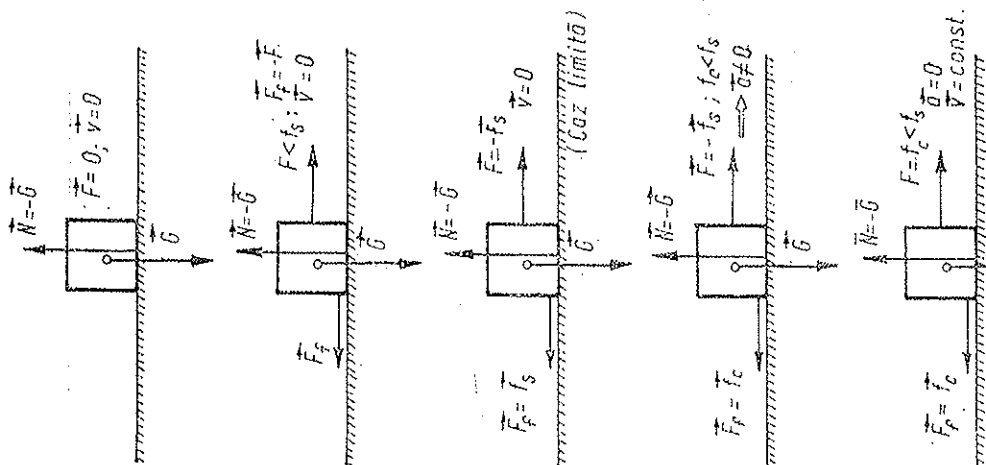


Fig. 3.14

fețelor în contact (gradul de șlefuire sau de contaminare cu oxizi sau alte substanțe). Coeficientul μ_c este, practic independent de viteza relativă de alunecare a corpului (la început scade puțin cu creșterea vitezei, apoi crește).

Dacă așezăm un corp pe un plan înclinat, atunci unghiul maxim de echilibru φ_s este dat de $\tan \varphi_s = \mu_s$, și se numește *unghi de aderență*. La fel unghiul planului pentru care corpul alunecă *uniform* φ_c este dat de $\tan \varphi_c = \mu_c$, și se numește *unghi de frecare la alunecare*.

În probleme de *statică* (echilibru cu frecare) sau de rostogolire *fără alunecare* intervine μ_s , iar în probleme de *cinematică* în care apare *alunecarea* corpurilor intervine μ_c . Uneori deosebirea dintre μ_s și μ_c poate fi neglijată, deoa- rece valorile lor sînt apropiate între ele.

Cele două legi ale frecării au fost descoperite experimental de Leonardo da Vinci (1452-1519) și redescoperite în 1699 de inginerul francez G. Amontons. Ulterior savantul francez Charles A. Coulomb (1736—1806) a efectuat multe experiențe asupra frecării și a subliniat deosebirea dintre frecarea statică și cea cinetică. În cinstea lui cele două legi îi poartă numele.

b) *Explicația legilor frecării* rezultă din analiza microscopică a suprafețelor în contact. Oricît de șlefuite ar fi suprafețele, ele prezintă nenumărate neregularități sau asperități microscopice. Atunci aria *reală* a contactului este mult mai mică decît aria *aparentă macroscopică* (poate fi de zece mii de ori mai mică). Această arie reală de contact este proporțională cu apăsarea normală, deoarece virtuțile neregularităților, dacă sînt supuse la apăsare sporită, se deformează plastic (presiunea este foarte mare din cauza ariei mici) și aria reală de contact crește practic proporțional cu apăsarea. În cazul alunecării aceste contacte-suduri dintre suprafețe sînt rupte și se formează continuu altele noi. La rostogolire asperitățile sînt mai degrabă „netezite”, sau „călcate”, decît rupte ca în cazul alunecării, de aceea *frecarea la rostogolire este mult mai mică* (de sute de ori), decît frecarea la alunecare (așa se explică rolul rulmenților).

Este bine cunoscut rolul frecării în natură și în tehnică.

3.9. PROBLEMELE DINAMICII PUNCTULUI MATERIAL

În mecanica punctului material se pun următoarele două probleme:

I. *Cunoscînd legea de mișcare a punctului material, să se determine forța sub acțiunea căreia se produce această mișcare.*

Problema se rezolvă prin derivarea succesivă a ecuațiilor cinematice ale mișcării. Întîi se obțin componentele vitezei, apoi ale accelerației. Înmulțind acestea din urmă cu masa, obținem componentele *forței*.

II. *Problema fundamentală. Cunoscînd forța care acționează asupra punctului material, poziția inițială și viteza inițială, să se determine legea de mișcare a punctului material.*

Problema se rezolvă prin *integrarea* succesivă a ecuațiilor diferențiale ale dinamicii punctului material:

$$m\ddot{r} = \vec{F} \text{ sau } m\ddot{u} = F_x, \quad m\ddot{v} = F_y, \quad m\ddot{w} = F_z, \quad (3.39)$$

în care forța este în general funcție de coordonate (poziție), timp și viteză: $\vec{F}(\vec{r}, t, \vec{v})$. La aceste ecuații se adaugă de obicei anumite condiții restrictive pentru mișcare și anumite condiții pentru forțe, de exemplu pentru forțele de frecare ($F_f = \mu N$).

Pentru a stabili corect forțele trebuie în primul rând precizat bine *sistemul fizic pe care-l studiem*. Apoi îl izolăm mintal de mediul înconjurător și reprezentăm acțiunea mediului asupra corpului prin forțele corespunzătoare: se spune că „eliberăm” corpul de legăturile sale (cu mediul), dar introducând

reacțiunile respective *ale legăturilor*. Obținem astfel corpul „liber”, supus la forțele corespunzătoare, și putem aplica legile mecanicii (alegând convenabil un SC).

Oricare forță pe care o reprezentăm trebuie să fie exercitată neapărat de un corp din mediul înconjurător. Pentru a nu greși, este bine să urmărim următoarele trei categorii de forțe:

- forțe exercitate prin câmp, de exemplu greutatea $m\vec{g}$ (forța electrică $q\vec{E}$ etc.);
- forțe active de tracțiune sau împingeri prin fire sau tije;
- forțe de contact cu alte corpuri.

La contactul a două corpuri solide apar totdeauna două forțe: *reacțiunea normală* \vec{N} și *forța de frecare* \vec{F}_f (fig. 3.15). Reacțiunea normală \vec{N} se datorește deformării elastice a corpului din mediul înconjurător cu care corpul nostru studiat este în contact. Forța de frecare se opune deplasării corpului și este:

$$\begin{aligned} & \text{--- în cazul nealunecării:} & 0 \leq F_f \leq f_s = \mu_s N, \\ & \text{--- în cazul alunecării:} & F_f = f_c = \mu_c N. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Dacă corpul este în contact cu un fluid, atunci rolul reacțiunii normale îl joacă forța arhimedică (verticală), iar forța de frecare va fi forța de rezistență (funcție de viteză), întîmpinată de corp la înaintare.

Exemple. Să considerăm câteva cazuri simple de mișcare rectilinie.

a) Forța depinde numai de timp. Se poate aplica direct teorema impulsului:

$$mv - mv_0 = \int_0^t F(t) dt, \quad v = v_0 + \frac{1}{m} \int_0^t F(t) dt = v(t), \quad (3.41)$$

$$dx = v dt, \quad x = x_0 + \int_0^t v(t) dt = x(t).$$

b) Forța depinde numai de poziție. Se poate aplica direct teorema energiei cinetice:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \int_{x_0}^x F(x) dx, \quad v = \pm \left[v_0^2 + \int_{x_0}^x F(x) dx \right]^{1/2} = v(x), \quad (3.42)$$

$$dt = \frac{dx}{v}, \quad t = \int_{x_0}^x \frac{dx}{v(x)},$$

de unde se poate exprima $x = x(t)$.

c) Forța depinde numai de viteză:

$$m \frac{dv}{dt} = F(v), \quad dt = \frac{m dv}{F(v)}, \quad t = m \int_{v_0}^v \frac{dv}{F(v)} = t(v). \quad (3.43)$$

Dacă se poate determina de aici $v = v(t)$, atunci continuăm integrarea:

$$dx = v dt, \quad x = x_0 + \int_0^t v(t) dt = x(t). \quad (3.44)$$

Altfel, determinăm $x = x(v)$:

$$F dx = m \frac{dv}{dt} dx = mv dv, \quad dx = \frac{mv dv}{F(v)}, \quad (3.45)$$

$$x = x_0 + m \int_{v_0}^v \frac{v dv}{F(v)} = x(v).$$

Eliminând v din (3.44—45), putem obține ecuația mișcării $x = x(t)$.

3.10. OSCILATORUL ARMONIC

În baza legii fundamentale, ținînd seama de expresia accelerației (1.72), avem

$$F = ma = m\ddot{x} = -m\omega^2 x = -kx, \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (3.46)$$

adică *forța este proporțională cu elongația și îndreptată spre centrul atractiv*. Reciproc, se poate lua această lege a forței $F = -kx$ pentru definirea mișcării oscilatorii armonice.

Perioada se exprimă prin constanta cvasielastică $k = m\omega^2$ astfel:

$$k = m\omega^2, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (3.47)$$

Energia potențială a punctului material în câmpul forței elastice $F = -kx$ este

$$U = -\int_0^x F dx = -\int_0^x (-kx) dx = -\frac{1}{2} kx^2 \quad (3.48)$$

și se reprezintă deci printr-o parabolă (fig. 1.16).

Energia mecanică a punctului material se conservă:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \alpha), \quad U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \alpha), \quad (3.49)$$

$$E = E_c + U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \text{const.} \quad (3.50)$$

Energia cinetică se transformă permanent în energie potențială și reciproc. În punctele extreme $E_c = 0$ și U este maximă, iar în centrul mișcării $U = 0$ și E_c este maximă.

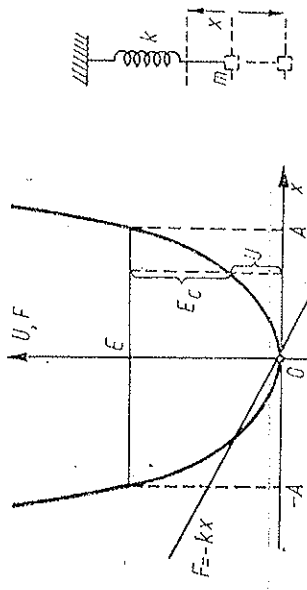


Fig. 3.16

Exemplu: Un corp de masă m suspendat pe un resort elastic de constantă k oscilează vertical ca un oscilator armonic.

Observație. În mecanica clasică se arată că energia totală E a unui oscilator armonic este *cuantificată*, adică poate lua un șir discret de valori:

$$E = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.51)$$

$$\hbar = h/2\pi = 1,0545 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \quad (h - \text{constanta Planck}).$$

3.11. PENDULUL GRAVITAȚIONAL SIMPLU (MATEMATIC)

Pendulul gravitațional simplu este un punct material suspendat printr-un fir inextensibil de masă neglijabilă, care poate oscila într-un plan vertical în jurul punctului de suspensie sub acțiunea greutății sale (fig. 3.17). Forțele de frecare se neglijează.

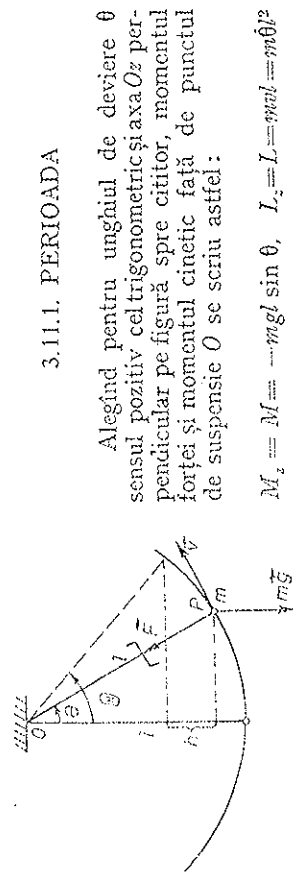


Fig. 3.17

Țensiunea din fir F nu dă moment față de O . Ecuația (3.10) dă atunci

$$M_z = \tilde{L}_z, \quad -mgl \sin \theta = m\ddot{\theta}, \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0, \quad (3.52)$$

$$M_z = \tilde{L}_z, \quad -mgl \sin \theta = m\ddot{\theta}, \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0, \quad (3.53)$$

unde masa m s-a simplificat, deci oscilațiile nu depind de masa punctului material. Ecuația poate fi rezolvată imediat pentru oscilații sub unghiuri mici $\theta \ll 1 \text{ rad}$ ($\theta < 6^\circ$). Atunci $\sin \theta \approx \theta$ (în rad) și obținem ecuația oscilatorului armonic:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0 \quad \text{sau} \quad \ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0, \quad \theta = \Theta \cos(\omega t + \alpha), \quad (3.54)$$

de unde rezultă (a nu se confunda frecvența unghiulară ω cu viteza unghiulară momentană $\dot{\theta}$):

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (3.55)$$

și legile cunoscute ale pendulului simplu:

1. Legea substanței. Perioada nu depinde de masa și natura substanței punctului material (indiferent de amplitudine).
2. Legea izocronismului oscilațiilor mici. Oscilațiile mici sînt *izocrone*, adică perioada oscilațiilor mici ($\theta < 6^\circ$) nu depinde de *amplitudinea* lor unghiulară.
3. Perioada oscilațiilor este direct proporțională cu rădăcina pătrată din lungimea pendulului și invers proporțională cu rădăcina pătrată din accelerația gravitațională.

3.11.2. TENSIUNEA DIN FIR

Putem calcula ușor și *tensiunea F din fir* (pentru orice amplitudine de oscilație), scriind ecuația fundamentală $\vec{F} = m\vec{a}$ pe direcția radială:

$$F - mg \cos \theta = ma_n = m \frac{v^2}{l}. \quad (3.56)$$

Dar din conservarea energiei mecanice:

$$\frac{1}{2} m v^2 = mgh = mgl(\cos \theta - \cos \Theta), \quad (3.57)$$

de unde

$$F = mg(3 \cos \theta - 2 \cos \Theta). \quad (3.58)$$

Tensiunea din fir este maximă pentru $\theta = 0$, adică în momentul cînd firul trece prin poziția verticală:

$$F_{\max} = mg(3 - 2 \cos \Theta). \quad (3.59)$$

În particular pentru oscilații cu amplitudinea $\Theta = 60^\circ$ și 90° (bineînțelese, oscilațiile nu mai sînt armonice) avem

$$F_{\max} = 2mg, \quad (\Theta = 60^\circ) \quad \text{și} \quad F_{\max} = 3mg, \quad (\Theta = 90^\circ). \quad (3.60)$$

Tensiunea din fir este minimă în pozițiile extreme: $F_{\min} = mg \cos \Theta$.

3.12. MIȘCAREA CIRCULARĂ

În mișcarea circulară oarecare, forța are componentele (fig. 3.18):

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad F_t = ma_t = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2s}{dt^2}, \quad (F_n = m\vec{v} = m\dot{s}) \quad (3.61)$$

$$\text{sau } F_t = m\dot{v}, \quad F_n = m\dot{s} = m\omega R,$$

$$F_n = ma_n = m\omega^2 R = m\omega^2 R = m\omega v,$$

vectorial:

$$\vec{F} = m\vec{v} \times \vec{v}, \quad \vec{F}_n = m\vec{\omega} \times \vec{r} = -m\omega^2 \vec{R} = -m\omega^2 \vec{R} = -m\omega^2 \vec{R} \quad (3.62)$$

$$\text{tg } \beta = \frac{a_t}{a_n} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \quad (3.63)$$

Fig. 3.18

Forța \vec{F} (F_t , F_n) poate fi de orice natură: elastică (fir întins, roți), gravitațională (planete, sateliți), electrostatică (electroni în atom în modelul Bohr), forța de frecare solid-solid (autovehicul pe șosea) etc.

În mișcarea circulară uniformă $v = \text{const}$ (dar $\vec{v} \neq \text{const}$), deci $a_t = \dot{v} = 0$ (dar $a_n = v^2/R$) și $F_t = 0$ ($\beta = 0$) — accelerația este centripetă și forța este centripetă.

PROBLEME

1. Pe o masă este întins un lanț. Un capăt al lanțului, de care este prins un corp greu de dimensiuni neglijabile, atârâ liber peste marginea mesei. Cind porțiunea de lanț de pe masă are lungimea l_0 , lanțul începe să lungească de pe masă. Să se calculeze viteza lanțului în momentul cind el părăsește masa.

$$R. \quad v = \sqrt{gl_0}$$

2. Un tren începe să frîneze uniform, parcurgînd o distanță $s_m = 180$ m pînă la oprire. Un pendul simplu suspendat în vagon a deviat cu un unghi maxim $\alpha_m = 10^\circ$ după începerea frînării. Care a fost viteza inițială a trenului?

$$R. \quad v_0 = \sqrt{2gs_m \text{tg}(\alpha_m/2)} = 17,5 \text{ m/s.}$$

3. Peste un scripete ideal este trecut un fir cu două corpuri identice de masă m fiecare, atîrnate la capete. Peste unul din corpuri este așezat un corp adițional de masă Δm și în firul de suspensie respectiv este intercalat un resort fin de constantă elastică k . Să se calculeze:

a) Diferența $R_0 \rightarrow R$ dintre apăsarea statică și cea dinamică exercitată de scripete asupra lagă-

relor sale; b) apăsarea exercitată de corpul adițional Δm asupra corpului pe care este așezat; c) alungirea suplimentară Δx a resortului în timpul mișcării.

$$R. \quad a) R_0 - R = \frac{(\Delta m)g}{2m + \Delta m}; \quad b) f = \frac{2gm\Delta m}{2m + \Delta m}; \quad c) \Delta x = -g \frac{(m + \Delta m)\Delta m}{k(2m + \Delta m)}.$$

4. Cu ce accelerație trebuie să coboare un automobil de masă M pe deasupra unei scinduri de masă m așezată pe un plan înclinat de unghi α , pentru ca scindura să lungească uniform în sus pe planul înclinat? Coeficientul de frecare între scindură și planul înclinat este μ .

$$R. \quad a = g(1 + m/M)(\sin \alpha + \mu \cos \alpha).$$

5. Variînd înclinarea unui plan înclinat s-a găsit că un corp așezat pe acest plan rămîne în repaus pînă la un unghi maxim egal cu $\varphi = 30^\circ$. Fixînd înclinarea la un unghi $\alpha = 45^\circ$ s-a găsit că viteza limită de alunecare liberă a corpului în jos pe plan atinge valoarea $v = 4,0$ m/s, forța de rezistență a aerului fiind proporțională cu pătratul vitezei corpului. Lăsuînd acum corpul cu viteza inițială $v_0 = 2,0$ m/s în sus pe planul înclinat (cu $\alpha = 45^\circ$), să se afle cu ce viteză se întoarce corpul înapoi la baza planului.

$$R. \quad v^2 = v_0^2 \frac{1}{v^2/c^2 + \sin(\alpha + \varphi)/\sin(\alpha - \varphi)}, \quad v' = 1,0 \text{ m/s.}$$

6. Un pendul simplu de masă m este fixat într-un cărucior care: a) urcă, respectiv coboară, cu o accelerație constantă a pe un plan înclinat de unghi α ; b) urcă sau coboară liber pe acel plan, unghiul de frecare fiind φ . Să se afle: unghiul de deviere θ al firului de suspensie față de verticală și tensiunea R din fir în poziția de echilibru relativ a pendulului, precum și perioada micilor oscilații în jurul poziției de echilibru relativ.

$$R. \quad a) \text{tg } \theta = \frac{-a \cos \alpha}{g \pm a \sin \alpha}, \quad R = m \sqrt{g^2 + a^2 \pm 2ga \sin \alpha},$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{R}}; \quad b) \theta = \varphi \pm \alpha, \quad R = mg \frac{\cos \alpha}{\cos \varphi}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \varphi}{g \cos \alpha}}.$$

7. Un corp suspendat de un resort oscilează cu perioada $T_1 = 0,50$ s. Adăugînd un corp suplimentar, perioada devine $T_2 = 0,60$ s. Cu cît a coborît centrul de oscilații?

$$R. \quad \Delta x = \frac{g}{4\pi^2} (T_2^2 - T_1^2) = 2,7 \text{ cm.}$$

8. Un punct material execută oscilații mici pe o curbă notedă situată în planul vertical, în jurul minimului curbei, sub acțiunea gravitației. Să se arate că perioada oscilațiilor mici este

$$T = 2\pi \sqrt{R_0/g},$$

unde R_0 este raza de curbura a curbei în punctul de minim.

9. O particulă se mișcă pe o axă orizontală Ox într-un câmp de forță, dependent de coordonată, conform graficului din fig. 3.19 ($F_0 = 10$ N). Asupra particulei acționează de asemenea și o forță de frecare, cu $|F_f| < F_0$. Particula pleacă din punctul A de abscisă $x_0 = 0,10$ m, fără viteză inițială.

a) Să se calculeze căldura degajată prin frecare, pînă la oprirea particulei.

b) Considerînd $|F_f| = \text{const}$, să se reprezinte, calitativ, viteza particulei în funcție de coordonată (traiectoria în spațiul fazelor).

R. a) Particula se mișcă în grupa de potențial $U = F_0|x|$ (fig. 3.20), $Q = F_0 x_0 = 1,0$ J; b) fig. 3.21.

10. O barcă de masă m întinpină din partea apei o forță de rezistență proporțională cu pătratul vitezei, cu constanta de proporționalitate k . După cât timp viteza inițială v_0 a bărcii se micșorează de n ori?

R.
$$\tau = \frac{m(n-1)}{kv_0}.$$

11. O barcă cu motor întinpină din partea apei o forță de rezistență proporțională cu pătratul vitezei. În momentul când viteza bărcii este $v_0 = 10$ m/s, motorul este oprit și după

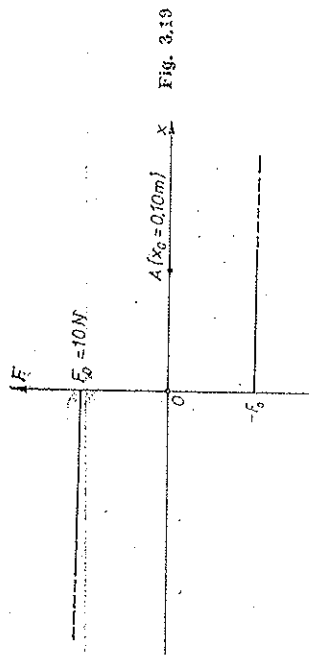


Fig. 3.19

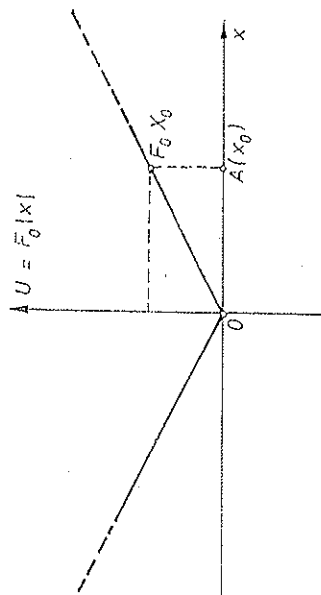


Fig. 3.20

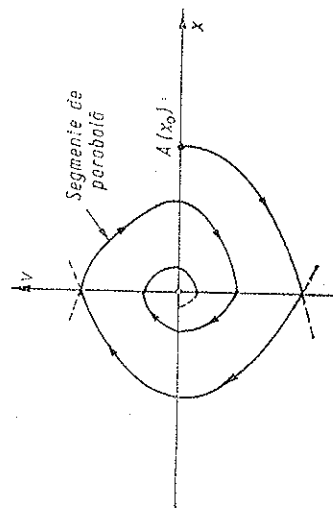


Fig. 3.21

un timp $\tau = 17,2$ s viteza bărcii devine de e ori mai mică ($e =$ baza logaritmiilor naturali). Să se calculeze distanța parcursă de barcă în acest timp.

R.
$$x_m = \frac{v_0}{e-1} = 100 \text{ m}.$$

12. O barcă de masă $m = 100$ kg întinpină din partea apei o forță de rezistență proporțională cu viteza. În momentul când viteza bărcii este $v_0 = 1,00$ m/s motorul este oprit și după un timp $\tau = 10$ s viteza bărcii se micșorează de e ori ($e =$ baza logaritmiilor naturali). Să se afle: a) constanta de proporționalitate din legea forței de rezistență, b) distanța parcursă în timpul indicat, c) distanța parcursă până la oprire.

R. a) $k = \frac{m}{\tau} = 10$ kg/s; b) $x = v_0 \frac{e-1}{e} = 6,3$ m; c) $x_m = v_0 = 10$ m.

13. O particulă cade liber în aer fără viteză inițială. Ea întinpină din partea aerului o forță de rezistență proporțională cu viteza. Să se calculeze după cât timp particula atinge 99% din viteza sa limită de cădere liberă, care este $c = 4,9$ cm/s.

R.
$$t = 2,3 \cdot \frac{2c}{g} = 23 \text{ ms}.$$

14. O particulă cade în aer fără viteză inițială și întinpină din partea aerului o forță de rezistență proporțională cu viteza. Știind viteza limită de cădere liberă c , să se exprime viteza și coordonata particulei în funcție de timp.

R.
$$v = c(1 - e^{-gt/c}), \quad x = ct + \frac{c^2}{g}(e^{-gt/c} - 1).$$

15. Un corp cade în aer fără viteză inițială și întinpină din partea aerului o forță de rezistență proporțională cu pătratul vitezei. Știind viteza limită de cădere liberă c , să se exprime: a) viteza în funcție de timp; b) coordonata în funcție de timp; c) coordonata în funcție de viteză.

R. a) $v = c \tanh \frac{gt}{c}$; b) $x = \frac{c^2}{g} \ln \frac{gt}{c}$; c) $x = \frac{c^2}{2g} \ln \frac{1}{1-v^2/c^2}$.

16. Un corp este aruncat vertical în sus în aer cu viteza inițială v_0 . Corpul întinpină din partea aerului o forță de rezistență proporțională cu pătratul vitezei. Cunoșcând viteza limită de cădere liberă c , să se afle: a) timpul de urcare t_m și înălțimea maximă h_m la care se ridică corpul; b) timpul de coborîre t' și viteza v' cu care corpul ajunge înapoi pe Pământ.

R. a) $t_m = \frac{c}{g} \operatorname{arctg} \frac{v_0}{c}$, $h_m = \frac{c^2}{2g} \ln(1 + v_0^2/c^2)$;

b) $t' = \frac{c}{g} \ln(v_0/c + \sqrt{1 + v_0^2/c^2})$, $v' = (1/v_0^2 + 1/c^2)^{-1/2}$.

17. Într-un jgheab curbat sub formă de circumferință orizontală de rază R luncă un corp cu coeficientul de frecare μ și viteza inițială v_0 . Să se afle: a) coordonata curbilinie s

în funcție de viteză; b) viteza inițială necesară pentru ca acest corp să înconjoare complet circumferința.

$$\text{R. } a) s = \frac{R}{2\mu} \left(\arg \operatorname{sh} \frac{v_0^2}{Rg} - \arg \operatorname{sh} \frac{v^2}{Rg} \right) = \frac{R}{2\mu} \ln \frac{1 + \sqrt{1 + v_0^2/Rg}}{1 + \sqrt{1 + v^2/Rg}};$$

$$b) v_0^2 = Rg \operatorname{sh} 2\mu.$$

18. Un corp de masă m luncă pe suprafața interioară a unei sfere de rază R , cu coeficientul de frecare la înlocuire μ , pornind fără viteză inițială din extremitatea unui diametru orizontal al sferei. Să se exprime energia cinetică a corpului în funcție de unghiul la centru θ descris de raza vectorie a corpului.

$$\text{R. } \frac{mv^2}{2} = \frac{mgR}{1 + \frac{1}{4}\mu^2} [3\mu \cos \theta + (1 - 2\mu^2) \sin \theta - 3\mu e^{-2\mu\theta}].$$

19. Să se arate că la mișcarea liberă a unei particule în aer, oricare ar fi forța de rezistență a aerului, avem

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{g}{v^2},$$

unde v_x este componenta vitezei pe axa orizontală.

20. O particulă este aruncată în aer cu viteza inițială v_0 sub unghiul α_0 față de orizontală. Forța de rezistență din partea aerului este proporțională cu viteza. Cunoșcând viteza limită c de cădere liberă, să se scrie: a) componentele vitezei $v_{x,y}$ în funcție de timp; b) coordonatele x, y în funcție de timp; c) timpul de urcare t_m până la înălțimea maximă; d) coordonatele înălțimii maxime; e) ecuația traiectoriei și asimptota ei.

$$\text{R. a) } v_x = v_0 \cos \alpha_0 e^{-gt/c}, \quad v_y = (c + v_0 \sin \alpha_0) e^{-gt/c} - c;$$

$$b) x = \frac{c}{g} v_0 \cos \alpha_0 (1 - e^{-gt/c}), \quad y = \frac{c^2}{g} \left(1 + \frac{v_0}{c} \sin \alpha_0 \right) (1 - e^{-gt/c}) - ct;$$

$$c) t_m = \frac{c}{g} \ln \left(1 + \frac{v_0}{c} \sin \alpha_0 \right); \quad d) x_m = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{2g} \frac{1}{1 + \frac{v_0}{c} \sin \alpha_0};$$

$$y_m = \frac{c}{g} v_0 \sin \alpha_0 - \frac{c^2}{g} \ln \left(1 + \frac{v_0}{c} \sin \alpha_0 \right);$$

$$e) y = \frac{cx}{v_0 \cos \alpha_0} \left(1 + \frac{v_0}{c} \sin \alpha_0 \right) + \frac{c^2}{g} \ln \left(1 - \frac{gx}{c v_0 \cos \alpha_0} \right),$$

asimptota verticală: $x = \frac{c}{g} v_0 \cos \alpha_0$.

21. Să se arate că în orice mișcare plană a unei particule momentul său cinetic în raport cu o axă oarecare din planul mișcării se conservă și are valoarea zero.

R. Impulsul $m\vec{v}$ este incident sau paralel cu axa, deci $L_H = 0$.

22. La *pendulul conic* (particula descrie un cerc orizontal, iar firul de suspensie, pînă la unii con), față de care punct se conservă momentul cinetic al particulei și ce valoare are? Care este variația pe unitatea de timp a momentului cinetic față de punctul de suspensie?

R. a) Față de centrul cercului: $L = m r v = m l \cos \frac{\gamma}{2} g \cos \alpha$, \vec{L} este vertical; b) $|\dot{L}|/|\dot{\alpha}| = mgl \cos \alpha$; $\vec{L} = m\vec{r}$ este tangent la cerc.

23. O particulă se mișcă liber, fără frecare, sub acțiunea forței de greutate, pe suprafața interioară a unei sfere. Să se arate că momentul cinetic al particulei în raport cu diametrul vertical al sferei se conservă.

R. $M_H = 0$ căci $m\vec{g}$ este paralel, iar \vec{N} este incident cu diametrul vertical.

24. Două particule se mișcă rectiliniu uniform cu viteze egale în modul dar în sensuri opuse pe două drepte paralele. Să se arate că momentul cinetic total în raport cu orice punct din spațiu se conservă și nu depinde de alegerea acestui punct.

R. $L = d m v$, unde $m v$ este impulsul unei particule și d — distanța dintre drepte (\vec{L} este perpendicular pe planul mișcării).

25. O bilă de masă $m = 100$ g, legată de un centru fix printr-un fir de lungime $l_1 = 60$ cm, execută o mișcare circulară uniformă pe un plan orizontal neted fără frecări cu turația $n_1 = 1,00$ rot/s. Ce turație va avea bila dacă firul se scurtează pînă la lungimea $l_2 = 30$ cm? Ce lucru mecanic a efectuat forța care a scurtat firul?

$$\text{R. } n_2 = n_1^2 l_1^2 / l_2^2 = 4,0 \text{ rot/s}; \quad W = \frac{1}{2} m \cdot 4\pi^2 n_1^2 l_1^2 \left(\frac{l_1^2}{l_2^2} - 1 \right) = 0,212 \text{ J}.$$

26. Peste un cilindru fix este trecut un fir astfel încît unghiul la centru al porțiunii înfășurate este θ (fig. 3.22). Pentru ce raport al tensiunilor din fir, T_2/T_1 , firul va începe să luncce, dacă coeficientul de frecare la înlocuire dintre fir și cilindru este μ ?

Considerind că $\theta = \pi$ și că la capetele firului atîrnă două corpuri de mase m_1, m_2 , care este condiția de înlocuire și cu ce accelerație se mișcă corpurile dacă această condiție este îndeplinită?

$$\text{R. } T_2/T_1 = e^{2\mu}; \quad m_2/m_1 > e^{2\mu}, \quad a = g \frac{m_2/m_1 - e^{2\mu}}{m_2/m_1 + e^{2\mu}},$$

$$T_1 = \frac{2m_2 g}{m_2/m_1 - e^{2\mu}}, \quad T_2 = \frac{2m_2 g e^{2\mu}}{m_2/m_1 - e^{2\mu}}, \quad T_2 - T_1 = 2m_2 g \frac{e^{2\mu} - 1}{m_2/m_1 + e^{2\mu}}.$$

27. Un punct material de masă m pornește din repaus sub acțiunea forței $\vec{F} = \vec{F}_0 \cos \omega t$. Să se scrie legea mișcării.

$$\text{R. } x = \frac{F_0}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t).$$

28. Un lanț de lungime l și masă m este ținut inițial de capătul superior astfel încît capătul său inferior atinge o masă, apoi se lasă să cadă liber. Ce forță va exercita lanțul asupra mesei și ce impuls total transmite el mesei?

$$\text{R. } F = \frac{m}{l} v^2 = \frac{m}{l} g^2 t^2, \quad t \leq \sqrt{2l/g}; \quad p = \frac{2m}{3} \sqrt{2gl}.$$

29. O particulă lovește perfect elastic (și oblic) o altă particulă identică aflată în repaus. Să se arate că vitezele particulelor după ciocnire sînt perpendiculare între ele.

30. Pe o masă cu periu de aer descrisă o mișcare circulară un disc de masă m prins printr-un fir orizontal, trecut printr-un oficiu în masă și tras în jos cu viteza constantă u . Care este tensiunea din fir în funcție de raza r , dacă pentru $r = r_0$ viteza unghiulară era ω_0 ?

$$\text{R. } F = m\omega_0^2 r_0^4 / r^3.$$

și prin însumarea asupra tuturor particulelor din sistem regăsim (4.2):

$$\vec{\mathcal{F}} = \sum_k \vec{\mathcal{F}}_k = \sum_{k,l} \vec{\mathcal{F}}_{kl} = 0. \quad (4.4)$$

Momentul rezultat al forțelor interne este de asemenea nul:

$$\vec{\mathcal{M}} = \sum_k \vec{r}_k \times \vec{\mathcal{F}}_k = \sum_{k,l} \vec{r}_k \times \vec{\mathcal{F}}_{kl} = 0. \quad (4.5)$$

În adevăr, ultima sumă este formată din perechi de termeni care dau zero:

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 \times \vec{\mathcal{F}}_{12} + \vec{r}_2 \times \vec{\mathcal{F}}_{21} &= \vec{r}_1 \times \vec{\mathcal{F}}_{12} - \vec{r}_2 \times \\ &\times \vec{\mathcal{F}}_{12} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{\mathcal{F}}_{12} = 0, \end{aligned}$$

deoarece $\vec{r}_1 \times \vec{\mathcal{F}}_{12} = \vec{r}_2 \times \vec{\mathcal{F}}_{12}$ reprezintă momentul aceiași forțe $\vec{\mathcal{F}}_{12}$ față de același pol O , sau altfel, deoarece $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ este paralel cu $\vec{\mathcal{F}}_{12}$ (fig. 4.1).

Se poate judeca și astfel:

$$\vec{\mathcal{M}} = \sum_{k,l} \vec{r}_k \times \vec{\mathcal{F}}_{kl} = - \sum_{k,l} \vec{r}_l \times \vec{\mathcal{F}}_{lk}, \quad (4.6)$$

unde am ținut seama întâi de (4.1), apoi am schimbat notațiile indicilor de sumare (indici „muți”). Luând semisuma celor două expresii pentru $\vec{\mathcal{M}}$:

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{2} \sum_{k,l} (\vec{r}_k - \vec{r}_l) \times \vec{\mathcal{F}}_{kl} = 0, \quad (4.7)$$

deoarece vectorul $\vec{r}_k - \vec{r}_l$ este paralel cu $\vec{\mathcal{F}}_{kl}$.

Teoremă. *Rezultanta forțelor interne și momentul rezultat al forțelor interne față de orice pol sînt nule.*

Lucrul mecanic al forțelor interne nu este însă în general nul:

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{F}}_{kl} d\vec{r}_k + \vec{\mathcal{F}}_{lk} d\vec{r}_l &= \vec{\mathcal{F}}_{kl} d(\vec{r}_k - \vec{r}_l) = \vec{\mathcal{F}}_{kl} d\vec{r}_{kl}, \\ \mathcal{W} = \sum \vec{\mathcal{F}}_k d\vec{r}_k &= -\frac{1}{2} \sum \vec{\mathcal{F}}_{kl} d\vec{r}_{kl}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

În cazul corpurilor *rigide* (nedeformabile), distanțele reciproce r_{kl} sînt constante:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{kl} &= \text{const} \rightarrow 2\vec{r}_{kl} d\vec{r}_{kl} = 0 \rightarrow d\vec{r}_{kl} \perp \vec{r}_{kl}, \\ \vec{r}_{kl} \parallel \vec{\mathcal{F}}_{kl} &\rightarrow d\vec{r}_{kl} \perp \vec{\mathcal{F}}_{kl} \rightarrow \vec{\mathcal{F}}_{kl} d\vec{r}_{kl} = 0, \end{aligned} \quad (4.9)$$

CAPITOLUL 4

DINAMICA SISTEMULUI MECANIC

Prin sistem mecanic vom înțelege un sistem de puncte materiale, care nu sînt independente, ci supuse la legături reciproce, astfel încît formează un „întreg” mai mult sau mai puțin deformabil (R. Boscovich 1758). *Exemple:* Un corp considerat ca ansamblu de particule (molecule, ioni), o mașină ale cărei părți pot fi aproximate prin puncte materiale, sistemul solar etc.

Pentru a deduce legile sistemului mecanic nu este nevoie de principii *noi*, ele se deduc din principiile formulate pentru punctul material.

4.1. FORȚELE INTERNE

Asupra fiecărui punct material m_k din sistem se exercită, pe de o parte, forțe *interne* $\vec{\mathcal{F}}_k$, din partea celorlalte puncte materiale m_l , ale sistemului și, pe de altă parte, forțe *externe* \vec{F}_k , din partea corpurilor externe care nu fac parte din sistem. Forțele interne sînt forțe de interacțiune dintre particulele sistemului (molecule, ioni etc.). Conform principiului III, forța (acțiunea) $\vec{\mathcal{F}}_k$ exercitată de particula m_l asupra particulei m_k este egală în modul și de sens opus cu forța reciprocă (reacțiunea) $\vec{\mathcal{F}}_{lk}$ exercitată de particula m_k asupra particulei m_l :

$$\vec{\mathcal{F}}_{kl} = -\vec{\mathcal{F}}_{lk}, \quad (\vec{\mathcal{F}}_{kk} \equiv 0) \quad \text{sau} \quad \vec{\mathcal{F}}_{kl} + \vec{\mathcal{F}}_{lk} = 0, \quad (4.1)$$

adică forțele interne sînt totdeauna *perechi*, două cîte două egale în modul și de sens opus (forțe de *interacțiune*), de aceea însumate fiind pentru *întregul* sistem dau o *rezultantă nulă*:

$$\vec{\mathcal{F}} = \sum_{k,l} \vec{\mathcal{F}}_{kl} = 0. \quad (4.2)$$

Forța internă rezultantă asupra particulei m_k este:

$$\vec{\mathcal{F}}_k = \sum_{l=1}^N \vec{\mathcal{F}}_{kl}, \quad (N = \text{numărul total de particule din sistem}) \quad (4.3)$$

deoarece $\vec{\mathcal{P}}_k$ este paralel cu \vec{r}_k și perpendicular pe $d\vec{r}_k$, deci lucrul mecanic (4.8) este nul.
 Pentru corpurile rigide (nedeformabile), lucrul mecanic al forțelor interne este nul.

În cazul corpurilor deformabile însă, forțele interne efectuează în general un lucru mecanic de deformare.

4.2. TEOREMA IMPULSULUI TOTAL*

Să aplicăm ecuația fundamentală (3.1) fiecărui punct material al sistemului:

$$\frac{d}{dt}(m_k \vec{v}_k) = \frac{d}{dt} \vec{p}_k = \vec{\mathcal{P}}_k + \vec{P}_k. \quad (4.10)$$

Prin însumare asupra tuturor punctelor sistemului, obținem:

$$\frac{d}{dt} \sum_k \vec{p}_k = \frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_k \vec{\mathcal{P}}_k + \sum_k \vec{P}_k = \sum_k \vec{F}_k = \vec{F}, \quad (4.11)$$

deoarece $\sum_k \vec{\mathcal{P}}_k = \sum_k \vec{\mathcal{P}}_k = 0$.

Teoremă. Derivata în raport cu timpul a impulsului total \vec{P} al sistemului este egală cu rezultanta \vec{F} a forțelor externe aplicate sistemului.

Dacă rezultanta forțelor externe este permanent nulă, impulsul total al sistemului se conservă: Sistemul nu-și poate schimba impulsul său total decât sub acțiunea unei forțe rezultante externe, care de fapt transmite impuls din partea corpurilor exterioare cu care sistemul interacționează. Forțele interne pot doar redistribui impulsul între părțile componente ale sistemului (de exemplu, prin ciocniri între particulele sistemului).

Sub formă integrată, avem:

$$\vec{H} = \int \vec{F} dt = \Delta \vec{P} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1, \quad (4.12)$$

analog teoremei impulsului pentru punctul material.

4.3. TEOREMA MOMENTULUI CINETIC TOTAL

Să aplicăm ecuația fundamentală sub forma (3.10) fiecărui punct material al sistemului:

$$\frac{d}{dt} (\vec{r}_k \times \vec{p}_k) = \frac{d}{dt} \vec{L}_k = \vec{r}_k \times \vec{\mathcal{P}}_k + \vec{r}_k \times \vec{P}_k = \vec{\mathcal{M}}_k + \vec{M}_k. \quad (4.13)$$

* Teoremele din continuare sînt valabile în SR inerțiale.

Însumînd după toate punctele sistemului rezultă:

$$\frac{d}{dt} \sum_k \vec{L}_k = \frac{d\vec{J}}{dt} = \sum_k \vec{r}_k \times \vec{F}_k = \vec{M}, \quad \vec{J} \equiv \sum_k \vec{L}_k, \quad \vec{M} = \sum_k \vec{M}_k, \quad (4.14)$$

deoarece

$$\vec{M} = \sum_k \vec{r}_k \times \vec{\mathcal{P}}_k = \sum_k \vec{r}_k \times \vec{\mathcal{P}}_k = 0.$$

Teoremă. Derivata în raport cu timpul a momentului cinetic total \vec{J} al sistemului față de un punct dat (pol) este egală cu momentul rezultant \vec{M} al forțelor externe față de același punct (pol).

Dacă $\vec{M} \equiv 0$ față de un pol, atunci \vec{J} față de acel pol se conservă, adică rămîne constant în timpul mișcării sistemului. La fel, dacă față de o axă $M_{||} \equiv 0$, atunci momentul cinetic în raport cu aceea axă $L_{||}$ se conservă. Forțele interne pot doar redistribui momentul cinetic între particulele componente ale sistemului (de exemplu, prin ciocniri).

Prin integrare obținem:

$$\vec{K} = \sum_k \int \vec{r}_k \times d\vec{H}_k = \int \vec{M} dt = \Delta \vec{J} = \vec{J}_2 - \vec{J}_1, \quad (4.15)$$

analog teoremei momentului cinetic pentru punctul material.

4.4. TEOREMA ENERGIEI CINETICE TOTALE

Scriem teorema energiei cinetice (3.25) (nerelativist) pentru fiecare punct material al sistemului:

$$d\left(\frac{1}{2} m_k v_k^2\right) = (\vec{\mathcal{P}}_k + \vec{P}_k) d\vec{r}_k = d\mathcal{W}_k + dW_k. \quad (4.16)$$

Însumînd pentru toate punctele sistemului și integrînd, obținem

$$d \sum_k \frac{1}{2} m_k v_k^2 = \sum_k (\vec{\mathcal{P}}_k + \vec{P}_k) d\vec{r}_k = d\mathcal{W} + dW, \quad (4.17)$$

$$\Delta \sum_k \frac{1}{2} m_k v_k^2 = \Delta E_c = \sum_k \int (\vec{\mathcal{P}}_k + \vec{P}_k) d\vec{r}_k = \mathcal{W} + W. \quad (4.18)$$

Teoremă. Variația energiei cinetice totale a sistemului este egală cu lucrul mecanic efectuat de toate forțele, afit externe, cît și interne.

Forțele interne pot mări sau micșora energia cinetică totală a sistemului pe seama altor forme de energie (prin intermediul lucrului mecanic al forțelor interne).

Exemple. Prin explozia unui obuz aflat inițial în repaus (deci cu energia cinetică inițială nulă) forțele interne creează o energie cinetică a schijeilor pe seama energiei chimice. Prin arderea combustibilului unei rachete se creează prin lucrul forțelor interne energia cinetică a rachetei. Un cosmonaut, chiar izolat în stare de imponderabilitate, își poate mișca membrele și instrumentele cu ajutorul forțelor proprii etc.

În cazul solidului rigid, lucrul mecanic \mathcal{W} al forțelor interne este nul și numai forțele externe pot schimba energia sa cinetică.

Sistem conservativ

Un alt caz important este acela când forțele interne sînt conservative, atunci se poate introduce energia potențială a sistemului, funcție numai de pozițiile tuturor punctelor materiale ale sistemului, adică funcție numai de configurația sistemului:

$$\mathcal{W} = \sum_k \int \vec{F}_k d\vec{r}_k \stackrel{\text{def}}{=} -\Delta U. \quad (4.19)$$

Teorema energiei cinetice devine în acest caz:

$$\begin{aligned} \Delta E_c &= -\Delta U + \sum_k \int \vec{F}_k d\vec{r}_k = -\Delta U + W, \\ \Delta(E_c + U) &= \sum_k \int \vec{F}_k d\vec{r}_k = W. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Prin urmare, variația energiei mecanice, cinetice și potențiale, a unui sistem conservativ este egală cu lucrul mecanic al forțelor externe aplicate. De aici rezultă teorema conservării energiei mecanice (cinetice și potențiale) a unui sistem conservativ izolat.

4.5. MIȘCAREA CENTRULUI DE MASĂ

Se numește centru de masă al unui sistem mecanic punctul definit prin vectorul de poziție

$$\begin{aligned} \vec{r}_{cm} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{k=N} m_k \vec{r}_k, & m &= \sum_{k=1}^N m_k, \\ x_{cm} &= \frac{1}{m} \sum m_k x_k, & y_{cm} &= \frac{1}{m} \sum m_k y_k, & z_{cm} &= \frac{1}{m} \sum m_k z_k \end{aligned} \quad (4.21)$$

sau pentru o distribuție continuă a masei:

$$\vec{r}_{cm} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{m} \int \vec{r} dm = \frac{1}{m} \int \vec{r} \rho dV; \quad x_{cm} = \frac{1}{m} \int x \rho dV \text{ etc.} \quad (4.21')$$

Dacă sistemul se descompune în părți M_i , cu centre de masă cunoscute $\vec{r}_{cm,i}$, atunci grupind sumele (4.21) pe aceste părți, avem:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{m} \sum_i M_i \vec{r}_{cm,i}, \quad x_{cm} = \frac{1}{m} \sum_i M_i x_{cm,i} \text{ etc.} \quad (4.21'')$$

Centrul de masă (CM) este un anumit punct geometric asociat sistemului mecanic; în acest punct pot să nu existe particule sau masă distribuită, de exemplu, CM al unui inel sau al unei pățuri sferice. Dacă un corp omogen posedă un plan sau o axă de simetrie, CM se va găsi în acel plan sau pe acea axă, iar dacă corpul omogen posedă un centru de simetrie, CM va fi în acel punct.

Centrul de masă joacă un rol *exceptional* în studiul mișcării sistemului, după cum se va vedea mai jos.

Derivând formula (4.21) obținem:

$$m \vec{v}_{cm} = m \vec{v}_{cm} = \sum_k m_k \vec{v}_k = \sum_k \vec{p}_k = \vec{P}. \quad (4.22)$$

Teorema 1. Impulsul total \vec{P} al sistemului este egal cu masa m a sistemului înmulțită cu viteza \vec{v}_{cm} a centrului de masă, ca și cum întreaga masă a sistemului ar fi concentrată în CM și s-ar mișca cu viteza acestuia.

Dacă sistemul este izolat: $\vec{F} = \vec{P} = 0$, $\vec{P} = \text{const}$ (impulsul total al sistemului izolat se conservă), dar $\vec{P} = m \vec{v}_{cm}$, deci $\vec{v}_{cm} = \text{const}$.

În raport cu un reper inerțial, centrul de masă al unui sistem izolat se mișcă rectilinear uniform sau este în repaus. (Acesta este legea inerției pentru un sistem.)

Derivând încă o dată (4.23) și ținînd seama de (4.11), obținem

$$m \vec{a}_{cm} = m \vec{a}_{cm} = m \vec{a}_{cm} = \vec{P} = \vec{F} = \sum_k \vec{F}_k. \quad (4.23)$$

Teorema 2. Rezultanta forțelor externe \vec{F} este egală cu masa sistemului înmulțită cu accelerația CM.

Centrul de masă al sistemului se mișcă ca un punct material cu masa egală cu masa sistemului și asupra căruia se aplică rezultanta forțelor externe (teorema mișcării centrului de masă), ca și cum toate forțele externe s-ar aplica în CM și întreaga masă a sistemului ar fi concentrată în CM și s-ar mișca cu accelerația acestuia.

Din (4.23) rezultă sub formă integrată:

$$\vec{H} = \int \vec{F} dt = m \Delta \vec{v}_{cm}. \quad (4.24)$$

Impulsul forțelor externe este egal cu masa sistemului înmulțită cu variația vitezei centrului de masă.

Consecință: Forțele interne nu pot schimba mișcarea centrului de masă.

De exemplu, după explozia unui obuz în vid, centrul de masă continuă să se miște neperturbat pe parabolă, ca și cum nimic nu s-ar fi întâmplat, deși schije se împrăștiă în jurul traiectoriei (fig. 4.2). În momentul în care una din schije atinge pământul, intervine o forță externă și, bineînțeles, CM își schimbă mișcarea.

Un *cuplu* de forțe, oriunde ar fi aplicat, nu poate schimba mișcarea centrului de masă (rezultantă nulă!), ci doar *rotește* corpul *în jurul centrului de masă*. De exemplu, dacă într-o barcă ușoară de cauciuc (pneumatică) punem în diferite locuri un bloc de plumb și aplicăm bărcii în diferite locuri un

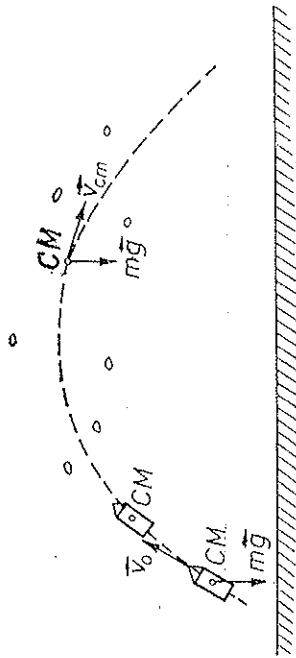


Fig. 4.2

cuplu de forțe horizontale, nu vom putea urni din loc CM al bărcii, a cărei poziție coincide practic cu cea a blocului de plumb; barca se va roti de fiecare dată *doar* în jurul CM (fig. 4.3).

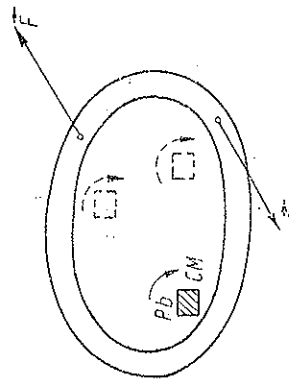


Fig. 4.3

4.6. MIȘCAREA ÎN JURUL CENTRULUI DE MASĂ

Teoremele de descompunere

Sistemul de coordonate *inerțial* legat de laborator se numește „sistem de coordonate de laborator”, notat prescurtat SL.

Alegem un SC mobil cu originea în CM al sistemului și cu axele de translație, solidat cu CM. Acest SC se numește „sistemul centrului de masă”, notat prescurtat SCM. Subliniem că SCM se mișcă *prin translație față de SL*, indiferenți de mișcarea CM, dar nu se rotește față de SL.

Atunci mișcarea punctelor materiale ale sistemului se descompune într-o mișcare de *translație*, egală cu translația centrului de masă și o mișcare *relativă* în jurul centrului de masă, anume în SCM. Avem (fig. 4.4):

$$\vec{r}_k = \vec{r}_{cm} + \vec{r}'_k \quad (4.25)$$

Prin înmulțire cu m_k și sumare avem

$$\sum m_k \vec{r}_k = \sum m_k \vec{r}_{cm} + \sum m_k \vec{r}'_k \text{ sau } m \vec{r}_{cm} = m \vec{r}_{cm} + \sum m_k \vec{r}'_k,$$

adică

$$\vec{r}'_{cm} = \frac{1}{m} \sum m_k \vec{r}'_k = 0, \quad (4.26)$$

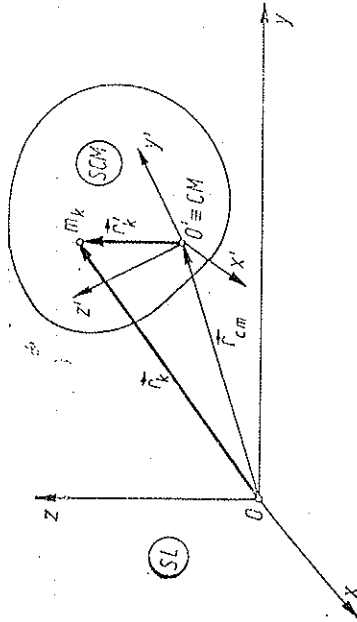


Fig. 4.4

ceea ce era evident, deoarece CM coincide cu O' și deci vectorul său de poziție relativ \vec{r}'_{cm} în SCM este automat zero.

4.6.1. IMPULSUL

Derivând (4.25) avem

$$\dot{\vec{r}}_k = \dot{\vec{r}}_{cm} + \dot{\vec{r}}'_k \text{ sau } \vec{v}_k = \vec{v}_{cm} + \vec{v}'_k, \quad (4.27)$$

deoarece

$$\dot{\vec{r}}'_k = (x'_k \dot{\vec{i}}' + y'_k \dot{\vec{j}}' + z'_k \dot{\vec{k}}') = \dot{x}'_k \dot{\vec{i}}' + \dot{y}'_k \dot{\vec{j}}' + \dot{z}'_k \dot{\vec{k}}' = \vec{v}'_k;$$

vectorii SCM se mișcă prin *translație*, deci derivatele lor sînt nule.

Înmulțind cu m_k și sumînd avem

$$\vec{P} = \sum m_k \vec{v}_k = \sum m_k \vec{v}_{cm} + \sum m_k \vec{v}'_k = m \vec{v}_{cm} + \sum m_k \vec{v}'_k = \vec{P} + \sum m_k \vec{v}'_k$$

de unde

$$\vec{P}' = \sum m_k \vec{v}'_k \equiv m \vec{v}'_{cm} \equiv 0, \quad \vec{v}'_{cm} \equiv 0, \quad (4.28)$$

adică *impulsul relativ al sistemului, calculat în SCM (impulsul propriu sau intern), este identic nul*. Aceasta este evident deoarece CM coincide cu O' și deci viteza sa \vec{v}'_{cm} în SCM este automat permanent zero. Dealtfel relația (4.28) se obține direct prin derivarea relației (4.26).

Prin urmare, *impulsul total al sistemului $\vec{P} = \sum m_k \vec{v}_k$ coincide cu impulsul orbital sau extern $\vec{P} = m \vec{v}_{cm}$, impulsul propriu sau intern $\vec{P}' = \sum m_k \vec{v}'_k$ fiind identic nul*.

Teorema impulsului total, valabilă în SL, va fi valabilă și în SCM numai dacă acesta este inerțial, atunci în mod banal $\vec{F} \equiv 0$ și $\vec{P}' \equiv 0$.

4.6.2. MOMENTUL CINETIC

Să transformăm, conform lui (4.25, 27), expresia momentului cinetic, calculat în raport cu originea SL:

$$\begin{aligned}\vec{J} &= \sum \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k = \sum (\vec{r}_{cm} + \vec{r}'_k) \times m_k (\vec{v}_{cm} + \vec{v}'_k) = \\ &= \sum \vec{r}_{cm} \times m_k \vec{v}_{cm} + \sum \vec{r}'_k \times m_k \vec{v}_{cm} + \sum \vec{r}_{cm} \times m_k \vec{v}'_k + \sum m_k \vec{r}'_k \times \vec{v}'_k.\end{aligned}$$

Ultimii doi termeni se anulează conform lui (4.28, 26), astfel încît rezultă descompunerea:

$$\vec{J} = \sum \vec{r}_k \times \vec{p}_k = \vec{r}_{cm} \times m \vec{v}_{cm} + \sum \vec{r}'_k \times \vec{p}'_k = \vec{r}_{cm} \times \vec{P} + \vec{S} = \vec{L} + \vec{S}, \quad (4.29)$$

adică *momentul cinetic total* \vec{J} (în raport cu originea SL) este egal cu *momentul cinetic orbital sau extern* \vec{L} al centrului de masă, în care ar fi concentrată toată masa sistemului, plus *momentul cinetic propriu sau intern* (de „spin”) \vec{S} calculat în SCM (în raport cu CM).

Derivînd (4.29) și ținînd seama de (4.14), rezultă

$$\dot{\vec{J}} = \dot{\vec{r}}_{cm} \times \vec{P} + \vec{r}_{cm} \times \dot{\vec{P}} + \dot{\vec{S}} = \dot{\vec{M}} = \sum \vec{r}_k \times \dot{\vec{F}}_k = \sum (\vec{r}_{cm} + \vec{r}'_k) \times \dot{\vec{F}}_k,$$

dar

$$\dot{\vec{r}}_{cm} \times \vec{P} = \vec{v}_{cm} \times m \vec{v}_{cm} = 0, \quad \dot{\vec{P}} = \vec{F},$$

astfel încît

$$\dot{\vec{J}} = \vec{r}_{cm} \times \vec{F} + \dot{\vec{S}} = \vec{r}_{cm} \times \vec{F} + \sum \vec{r}'_k \times \dot{\vec{F}}_k, \quad (\dot{\vec{L}} = \vec{r}_{cm} \times \vec{F}),$$

de unde rezultă teorema momentului cinetic relativ:

$$\dot{\vec{S}} = \frac{d}{dt} \sum \vec{r}'_k \times \vec{p}'_k = \dot{\vec{M}}' = \sum \vec{r}'_k \times \dot{\vec{F}}_k, \quad (4.30)$$

$$\Delta \vec{S} = \vec{S}_2 - \vec{S}_1 = \int \dot{\vec{M}}' dt, \quad (4.31)$$

adică *teorema momentului cinetic se exprimă la fel în SL și în SCM, oricare ar fi mișcarea de translație a SCM*.

4.6.3. ENERGIA CINETICĂ

Să transformăm acum și expresia energiei cinetice:

$$\vec{v}_k = \vec{v}_{cm} + \vec{v}'_k, \quad v_k^2 = v_{cm}^2 + v'_k{}^2 + 2\vec{v}_{cm}\vec{v}'_k.$$

Înmulțind cu m_k și însumînd, ultimul termen dă zero, conform lui (4.28), și obținem teorema lui S. König (1751):

$$E_c = \sum \frac{1}{2} m_k v_k^2 = \frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \sum \frac{1}{2} m_k v'_k{}^2 = E_{cm} + E_c', \quad (4.32)$$

adică *energia cinetică totală a sistemului* E_c (în SL) este egală cu *energia cinetică de translație (orbitală sau externă)* E_{cm} a centrului de masă, în care ar fi concentrată toată masa sistemului, plus *energia cinetică relativă (propriu sau internă)* E_c' în SCM. (Termenul de „interferență” dintre ele dispare numai în SCM!)

Teorema energiei cinetice (4.17) devine acum:

$$\begin{aligned}dE_c &= d\left(\frac{1}{2} m v_{cm}^2 + E_c'\right) = \sum (\vec{\mathcal{F}}_k + \vec{F}_k)(d\vec{r}_{cm}) + dE_c' = \\ &= \sum \vec{\mathcal{F}}_k d\vec{r}_{cm} + \vec{F} d\vec{r}_{cm} + \sum (\vec{\mathcal{F}}_k + \vec{F}_k) d\vec{r}'_k, \\ \text{dar } \sum \vec{\mathcal{F}}_k &= 0 \text{ și} \\ \frac{d}{dt}(m \vec{v}_{cm}) &= \vec{F} \rightarrow d\left(\frac{1}{2} m v_{cm}^2\right) = \vec{F} d\vec{r}_{cm} = \vec{F} \vec{v}_{cm} dt, \quad (4.33)\end{aligned}$$

astfel încît rezultă teorema energiei cinetice relative:

$$dE_c' = d \sum \frac{1}{2} m_k v'_k{}^2 = \sum (\vec{\mathcal{F}}_k + \vec{F}_k) d\vec{r}'_k = dW' + dW', \quad (4.34)$$

$$\Delta E_c' = E_c' - E_c' = \sum_k \int (\vec{\mathcal{F}}_k + \vec{F}_k) d\vec{r}'_k = W' + W', \quad (4.35)$$

adică *teorema energiei cinetice totale se exprimă la fel în SL și în SCM, oricare ar fi mișcarea de translație a SCM*.

În concluzie, teoremele de mai sus ne arată că *mișcarea unui sistem mecanic se descompune în mișcarea de translație (orbitală sau externă) a centrului de masă în care ar fi concentrată toată masa sistemului și în care s-ar aplica rezultantele forțelor externe, și în mișcarea relativă (propriu sau internă) față de centrul de masă în SCM*.

Observații. a) Lucrul mecanic al forțelor interne este același în SL și în SCM, fiindcă o translație globală a sistemului mecanic nu modifică lucrul mecanic al forțelor interne:

$$dW = \sum \vec{\mathcal{F}}_k d\vec{r}_k = \sum \vec{\mathcal{F}}_k (d\vec{r}_{cm} + d\vec{r}'_k) = \sum \vec{\mathcal{F}}_k d\vec{r}'_k = dW', \quad (4.36)$$

și însuși lucrul mecanic al forțelor externe:

$$dW = \sum \vec{F}_k d\vec{r}_k = \vec{F} d\vec{r}_{cm} + \sum \vec{F}_k d\vec{r}'_k = d\left(\frac{1}{2} m v_{cm}^2\right) + dW'. \quad (4.37)$$

b) Un câmp gravitațional uniform nu influențează cu nimic momentul cinetic relativ (propriu sau intern) și energia cinetică relativă ale sistemului în SCM. În adevăr, conform lui (4.26, 28):

$$\vec{F}_k = m_k \vec{g}, \quad \vec{M}' = \sum \vec{r}_k' \times m_k \vec{g} = \sum m_k \vec{r}_k' \times \vec{g} = \vec{r}_{cm} \times m \vec{g} = 0, \quad (4.38)$$

$$dW' = \sum \vec{F}_k d\vec{r}_k' = \sum m_k \vec{g} d\vec{r}_k' = \vec{g} \sum m_k d\vec{r}_k' = m \vec{g} d\vec{r}_{cm} = 0. \quad (4.39)$$

Rezultatul este evident, deoarece centrul de masă coincide cu centrul de greutate, adică cu punctul de aplicare al rezultantei $\vec{G} = m\vec{g}$ a forțelor de greutate paralele $\vec{F}_k = m_k \vec{g}$ și deci momentul lui \vec{G} față de CM este nul ($\vec{r}_{cm} = 0$) și puterea dezvoltată de \vec{G} este nulă ($\vec{v}_{cm} = 0$).

4.7. CIOCNIRI

Prin ciocnirea a două sau mai multe corpuri se înțelege în general un proces de interacție, în care atât înainte cât și după interacție corpurile se găesc la distanțe mari (infinite) unele față de altele, adică nu interacționează înainte și după ciocnire, deci interacția durează un timp finit.

4.7.1. CLASIFICAREA CIOCNIRILOR

Dacă în urma ciocnirii starea internă a fiecărui corp nu se schimbă, ciocnirea se numește elastică.

Vom considera ciocnirea corpurilor macroscopice.

În momentul atingerii corpurile încep să se deformeze, viteza lor relativă (a unuia față de celălalt) se reduce la zero, energia cinetică relativă se transformă în energia de deformare și în alte forme de energie. Aceasta este etapa de comprimare. Urmează apoi etapa a doua, de separare a corpurilor, deformările se reduc, viteza relativă crește și energia cinetică relativă se restitue parțial.

În ciocnirea elastică deformările se anulează și energia cinetică relativă se restitue integral, fără a se transforma în alte forme de energie.

În ciocnirea total neelastică (plastică) corpurile fuzionează (se cuplează) și continuă mișcarea împreună, cu o viteză comună.

În realitate, ciocnirile corpurile macroscopice nu sînt (perfect) elastice, ci mai mult sau mai puțin neelastice.

Dacă descompunem viteza relativă de ciocnire $\vec{v}_r = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ (a corpului 1 față de corpul 2) după linia de ciocnire NN' și planul de contact, tangent, TT' (fig. 4.5), atunci ambele componente se schimbă în general prin ciocnire, deoarece corpurile nu sînt nici perfect elastice și nici absolut netede.

Componenta vitezei relative, normală pe planul de contact, v_{rn} , își schimbă sensul prin ciocnire, deoarece înainte de ciocnire corpurile se apropiu unul de altul, iar după ciocnire se depărtează unul de altul. Corpurile nefiind perfect elastice, componenta normală a vitezei relative după ciocnire v'_{rn} este în modul mai mică decît înainte de ciocnire, $|v'_{rn}| < |v_{rn}|$.

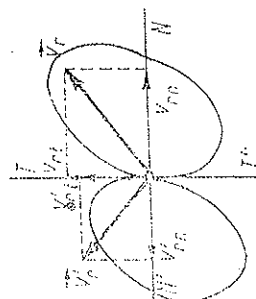


Fig. 4.5

Componenta vitezei relative, conținută în planul de contact, v_{rt} , reprezintă viteza de alunecare a unui corp peste celălalt în momentul ciocnirii. Datorită frecării, această viteză se micșorează în urma ciocnirii, $v'_{rt} < v_{rt}$.

Dacă linia de ciocnire NN' trece în momentul ciocnirii prin centrele de masă ale celor două corpuri, ciocnirea se numește centrică, în caz contrar, acentrică. Dacă înainte de ciocnire corpurile se mișcă după linia de ciocnire NN' ($v_{rt} = 0$), ciocnirea se numește frontală, în caz contrar, oblică.

Pentru sfere omogene ciocnirea va fi totdeauna centrică, dar în general oblică.

4.7.2. LEGILE DE CONSERVARE

În procesul de ciocnire se exercită forțe de interacțiune între corpuri, deci forțe interne, care nu pot schimba impulsul total și momentul cinetic total ale sistemului. Lucrul mecanic al forțelor interne este însă în general diferit de zero și produce o variație a energiei cinetice a sistemului, conform teoremei (4.17—18).

În intervalul de timp foarte scurt cît durează ciocnirea, variația de impuls și variația de moment cinetic, produse de eventuale forțe externe se pot neglija în comparație cu variațiile de impuls și de moment cinetic ale fiecărui corp în parte, produse de forțele interne, care deși durează puțin, sînt mult mai mari decît forțele obișnuite externe.

De aceea impulsul total și momentul cinetic total ale corpurilor care se ciocnesc, imediat înainte de ciocnire, sînt egale cu impulsul total și momentul cinetic total ale corpurilor imediat după ciocnire, adică impulsul total și momentul cinetic total ale sistemului de corpuri care se ciocnesc se conservă în procesul ciocnirii.

Eventualele forțe externe aplicate produc o variație de impuls și de moment cinetic neglijabile în timpul foarte scurt cît durează ciocnirea.

Pentru fiecare corp separat putem scrie (4.24) și (4.15) (în timpul foarte scurt al ciocnirii corpul practic nu se deplasează):

$$\vec{H} = \sum \vec{H}_i = m \Delta \vec{v}_{cm} \quad \text{și} \quad \vec{K} = \sum \vec{r}_i \times \vec{H}_i = \Delta \vec{J}. \quad (4.40)$$

4.7.3. CIOCNIREA PLASTICĂ

În cazul ciocnirii total neelastice (plastice) a două corpuri, ele se cuplează, astfel încît conservarea impulsului total dă:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}' \rightarrow \vec{v}' = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}, \quad (4.41)$$

unde \vec{v}_1, \vec{v}_2 sînt vitezele centrelor de masă (fig. 4.6).

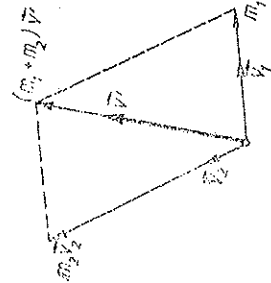


Fig. 4.6

Energia cinetică pierdută, adică transformată în alte forme de energie (mai ales căldură), va fi (nu considerăm rotațiile proprii):

$$\begin{aligned} -\Delta E_c = Q &= \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 - \\ &- \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (\bar{v}_1 - \bar{v}_2)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \mu v_{rel}^2, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad \bar{v}_r = \bar{v}_1 - \bar{v}_2, \quad (4.42) \end{aligned}$$

unde μ se numește *masa redusă* a celor două corpuri, iar \bar{v} , este viteza lor relativă (a corpului 1 față de corpul 2).

4.7.4. CIOCNIREA ELASTICĂ

În cazul ciocnirii *perfect elastice*, pe lângă impulsul total se conservă și energia cinetică totală. Considerînd ciocnirea *centrică și frontală*, corpurile înainte și după ciocnire se mișcă pe aceeași direcție (*dreaptă*) (cazul *unidimensional*) și avem

$$\begin{aligned} m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 v_1' + m_2 v_2', \quad \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2, \quad (4.43) \end{aligned}$$

de unde

$$m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2), \quad m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2(v_2'^2 - v_2^2)$$

și împărțind membru la membru

$$v_1 + v_1' = v_2' + v_2 \quad \text{sau} \quad v_1' = v_2' - v_2 = -(v_1 - v_2) = -v_r, \quad (4.44)$$

adică viteza relativă își schimbă doar semnul. Această ecuație împreună cu prima ecuație din (4.43) dau:

$$v_1' = 2v' - v_1, \quad v_2' = 2v' - v_2, \quad \text{unde} \quad v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \quad (4.45)$$

viteza v' de aici este viteza comună a corpurilor în momentul cînd se termină prima etapă a comprimării și începe a doua etapă, a separării.

Exemple. a) Dacă masele sînt egale, $m_1 = m_2$, rezultă din (4.45):

$$v_1' = v_2, \quad v_2' = v_1, \quad (4.45')$$

adică particulele schimbă vitezele între ele, ca și cum ar trece una pe lângă cealaltă fără să se ciocnească.

b) Dacă una din particule este în repaus înainte de ciocnire, de exemplu $v_2 = 0$, obținem din (4.45):

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1, \quad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1. \quad (4.46)$$

Dacă $m_1 > m_2$, particula m_2 lovită capătă o viteză $v_2' > v_1$ și particula m_1 continuă să se miște înainte. Dacă $m_1 < m_2$, particula m_1 ricoșează înapoi. Dacă $m_1 = m_2$, prima particulă se oprește, iar a doua (lovită) pleacă cu viteza primei.

4.7.5. COEFICIENTII DE CIOCNIRE

O măsură a caracterului mai mult sau mai puțin elastic al ciocnirii este coeficientul de restituire (Newton), definit prin raportul dintre componenta *normală* (pe planul de contact) a vitezei relative, după ciocnire $v_{rn}' = v_{1n}' - v_{2n}' = v_{1n}'$ și înainte de ciocnire $v_{rn} = v_{1n} - v_{2n}$, anume:

$$k = \frac{v_{rn}'}{v_{rn}} = -\frac{v_{1n}' - v_{2n}'}{v_{1n} - v_{2n}}, \quad 0 \leq k \leq 1. \quad (4.47)$$

Se introduce și un coeficient de frecare momentană f definit prin raportul dintre componenta *tangentială* (în planul de contact) a vitezei relative, după ciocnire $v_{rt}' = v_{1t}' - v_{2t}'$ și înainte de ciocnire $v_{rt} = v_{1t} - v_{2t}$, anume:

$$f = \frac{v_{rt}'}{v_{rt}} = \frac{v_{1t}' - v_{2t}'}{v_{1t} - v_{2t}}, \quad 0 \leq f \leq 1. \quad (4.48)$$

Acest coeficient este de obicei apropiat de 1 și se pune adesea egal cu 1 (la ciocniri apropiate de ciocniri frontale, sau la corpuri netede).

Pentru ciocnirea total neelastică $\bar{v}_1' = \bar{v}_2' = 0$, ($\bar{v}_1' = \bar{v}_2'$) și deci $k = 0$, $f = 0$. Pentru ciocnirea perfect elastică $v_1' = -v_1$, de exemplu (4.44), deci $k = 1$ și $f = 1$. Bilele de fildeș se apropie cel mai mult de o ciocnire elastică.

În cazul ciocnirii unidimensionale cu coeficientul de restituire k , obținem din conservarea impulsului:

$$v_1' = v' + \frac{k m_2}{m_1 + m_2} (v_2 - v_1), \quad v_2' = v' + \frac{k m_1}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2) \quad (4.49)$$

și energia cinetică pierdută:

$$-\Delta E_c = Q = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 - k^2) (v_1 - v_2)^2 = \frac{1}{2} \mu (1 - k^2) v_{rel}^2. \quad (4.50)$$

4.7.6. CIOCNIREA CU UN PERETE

În cazul ciocnirii perfect elastice, centrice și frontale, cu un *perete*, adică cu un corp de *masă foarte mare*, $m_2 \gg m_1$, din (4.45) rezultă

$$v_1' = 2v_2 - v_1, \quad v_2' = v_2. \quad (4.51)$$

În particular, pentru un perete în repaus, $v_2 = 0$, rezultă

$$v_1' = -v_1, \quad v_2' = v_2, \quad (4.52)$$

adică corpul 1 se întoarce înapoi cu aceeași viteză (în modul).

în cazul ciocnirii *oblice* (perfect elastice) cu peretele în repaus (fig. 4.7):

$$v'_t = v_t, \quad v'_n = -v_n, \quad |\vec{v}'| = |\vec{v}|, \quad (4.53)$$

adică viteza incidentă \vec{v} și viteza reflectată \vec{v}' sînt în același plan cu normala și unghiul de reflexie α' este egal cu unghiul de incidență α (ca la reflexia luminii).

Dacă notăm cu τ durata ciocnirii, atunci forța medie exercitată de perete asupra particulei va fi

$$\vec{f} = \frac{[\Delta(m\vec{v})]}{\tau} = \frac{m\vec{v}' - m\vec{v}}{\tau}, \quad \vec{f} = \frac{2mv \cos \alpha}{\tau}, \quad (4.54)$$

perpendiculară pe perete. Conform principiului acțiunii și reacțiunii, o forță egală în modul și de sens contrar se exercită perpendicular asupra peretelui din partea particulei.

4.3. MASA VARIABILĂ

Dacă într-un timp infinitesimal dt corpul cîștigă sau pierde o cantitate infinitesimală de masă dm , forțele de alipire sau expulzare sînt forțe interne și $m\vec{u}$ pot schimba impulsul *total* al sistemului. Notînd cu \vec{F} forța externă asupra corpului de masă m , cu \vec{v} viteza acestuia (a CM) și cu \vec{u} viteza masei dm , aplicăm teorema impulsului total, considerînd cazul alipirii ($dm > 0$) (fig. 4.8):

$$\begin{aligned} \vec{F} dt &= (m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) - (m\vec{v} + dm\vec{u}), \\ \vec{F} &= \frac{d(m\vec{v})}{dt} - \vec{u} \frac{dm}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} - \vec{v}' \frac{dm}{dt}, \quad \vec{v}' = \vec{u} - \vec{v}, \end{aligned} \quad (4.55)$$

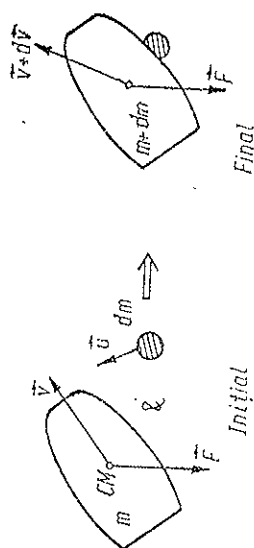


Fig. 4.8

(termenul infinit mic de ordinul doi $dm \cdot d\vec{v}$ dispare prin trecere la limită), unde \vec{v}' este viteza relativă față de corp a particulelor alipite. Aceeași ecuație se obține și în cazul expulzării ($dm < 0$) (fig. 4.9):

$$\vec{F} dt = (m - |dm|)(\vec{v} + d\vec{v}) + |dm|\vec{u} - m\vec{v} = (m + dm)(\vec{v} + d\vec{v}) - dm \cdot \vec{u} - m\vec{v}.$$

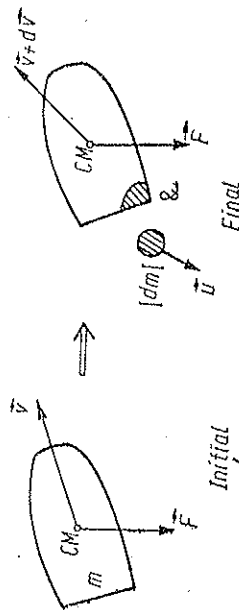


Fig. 4.9

Ecuația (4.55) este ecuația lui I.V. Meșcherski (1897) ($dm > 0$ pentru captare, $dm < 0$ pentru emisie).

Se poate scrie și astfel:

$$\vec{F} + \vec{u} \frac{dm}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \quad \text{sau} \quad \vec{F} + \vec{v}' \frac{dm}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{sau} \quad \vec{F} + \vec{F}_r = m\vec{a}, \quad (4.56)$$

unde

$$\vec{F}_r \stackrel{\text{def}}{=} \vec{v}' \frac{dm}{dt} \quad (4.57)$$

este forța reactivă care acționează asupra corpului: ea este proporțională cu viteza relativă \vec{v}' de expulzare (sau alipire) a particulelor și cu debitul masic de expulzare (sau alipire). În cazul expulzării (ejectării), masa corpului scade, $dm < 0$ și forța reactivă \vec{F}_r este de sens opus vitezei de expulzare \vec{v}' a particulelor.

Ecuația (4.56) se aplică în problema mișcării rachetelor (navigația interplanetară), a avioanelor și proiectilelor cu reacție, în unele probleme astronomice de captare a meteoriților și chiar în fizica atomică (la dezintegrarea alfa).

Exemple. Mișcarea rachetelor. a) Ca exemplu de aplicare a ecuației (4.56), fie o rachetă în cosmos purtînd din repaus, de masă inițială m_0 , care expulzează continuu gazele de ardere în direcția mișcării cu viteza \vec{v}' constantă față de rachetă. Ecuația (4.56) devine atunci, ținînd seama de direcția mișcării ($\vec{F} = 0$):

$$\begin{aligned} v' \frac{dm}{dt} &= m \frac{dv}{dt}, \quad dv = v' \frac{dm}{m}, \\ v &= v' \int_{m_0}^m \frac{dm}{m} = v' \ln \frac{m}{m_0} = -v' \ln \frac{m_0}{m}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Prin urmare, viteza rachetei este opusă vitezei de expulzare v' și dacă masa se reduce, de exemplu, la jumătate, viteza atinsă va fi $v = -0,693 v' \approx -0,7 v'$. Dacă masa rachetei se reduce de $\epsilon = 2,718$ ori, viteza devine $v = -v'$.

b) O rachetă lansată de pe Pământ. Neglijăm frecarea cu aerul și variația lui g , atunci ($\vec{F} = m\vec{g}$; $\vec{v}' = \text{const}$):

$$m\vec{g} + \vec{v}' \frac{dm}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{sau} \quad \vec{g} d\vec{t} + \vec{v}' \frac{dm}{m} = d\vec{v}, \quad (4.59)$$

ceea ce dă prin integrare

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t - \vec{v}' \ln \frac{m_0}{m}. \quad (4.60)$$

În cazul lansării rachetei pe verticală din repaus ($v' = \text{const}$ în jos), avem

$$v = |v'| \ln \frac{m_0}{m} - gt \quad (4.61)$$

și condiția de desprindere de Pământ

$$F_r \geq m_0 g, \quad \left| v' \frac{dm}{dt} \right| \geq m_0 g \quad \text{sau} \quad D \geq \frac{m_0 g}{|v'|}, \quad (4.62)$$

unde $D = \left| \frac{dm}{dt} \right|$ este debitul de expulzare a gazelor arse.

PROBLEME

1. Trei bărci merg una după alta cu viteza v fiecare. În fiecare barcă se află cite un om, astfel încît masa bărcii și a omului este M , iar în barca din mijloc mai există doi saci de masa m fiecare. Din barca din mijloc sînt aruncați cei doi saci, unul spre barca din față, celălalt spre barca din spate, cu aceeași viteză *relativă* u față de barcă. Care vor fi vitezele finale ale bărcilor, dacă sacii sînt aruncați: a) simultan; b) succesiv?

R. a) $v_1 = v + \frac{m}{M+m} u$, $v_2 = v$, $v_3 = v - \frac{m}{M+m} u$;

b) $v_1 = v + \frac{m}{M+m} u$, $v_2 = v + \frac{m^2}{M(M+m)} u$, $v_3 = v - \frac{m^2}{M(M+m)} u$

— sau $v_1 = v + \frac{m(M+2m)}{(M+m)^2} u$, $v_2 = v - \frac{m(M+2m)}{(M+m)^2} u$, $v_3 = v - \frac{m}{M+m} u$.

— sau $v_1 = v + \frac{m}{M(M+m)} u$, $v_2 = v - \frac{m}{M(M+m)} u$.

2. O particulă de masă m se mișcă cu viteza v_1 și ajunge din urmă un *perete* care se mișcă cu viteza v_2 și de care se ciocnește frontal cu coeficient de restituire k . Să se afle vitezele după ciocnire, variația de impuls și de energie cinetică a particulei incidente în urma ciocnirii.

R. $v'_1 = v_2 + k(v_2 - v_1)$, $v'_2 = v_2$, $\Delta p = -m(1+k)(v_1 - v_2)$,

$$\Delta E_c = -\frac{1}{2} m(1+k)(v_1 - v_2)[v_1 + v_2 - k(v_1 - v_2)].$$

3. O particulă de masă m_1 lovește o altă particulă de masă m_2 aflată în repaus. Considerînd ciocnirea unidimensională cu coeficientul de restituire k , să se afle vitezele particulelor după ciocnire și energia cinetică pierdută (căldura degajată).

R. $v'_1 = \frac{m_1 - km_2}{m_1 + m_2} v_1$, $v'_2 = \frac{m_1(1+k)}{m_1 + m_2} v_1$, $-\Delta E_c = Q = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 - k^2) v_1^2$.

4. Două bile de mase m_1 , m_2 sînt suspendate pe fire paralele, astfel încît bilele se ating. Prima bilă este dovitată pînă la o înălțime h_1 și lăsată liber. Știind coeficientul de restituire k și considerînd ciocnirea frontală, să se afle la ce înălțime se ridică bilele după ciocnire și căldura degajată prin ciocnire.

R. $h'_1 = h_1 \left(\frac{m_1 - km_2}{m_1 + m_2} \right)^2$, $h'_2 = h_1 \left(\frac{m_1(1+k)}{m_1 + m_2} \right)^2$,

$$-\Delta E_c = Q = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 - k^2) g h_1.$$

5. O particulă de masă m_1 lovește o altă particulă de masă m_2 aflată în repaus. Considerînd ciocnirea unidimensională cu coeficientul de restituire k , să se afle ce fracțiune din energia cinetică inițială a particulei 1 este transferată particulei 2 și ce fracțiune se transformă în căldură.

R. a) $\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} (1 + k)^2$; b) $\frac{m_2}{m_1 + m_2} (1 - k^2)$.

6. Două particule de mase m_1 , m_2 se află în repaus pe un plan orizontal la distanța ξ_0 una de alta. Particulei 1 i se aplică un impuls H îndreptat spre particula 2. Pe ce distanță se deplasează particula 2 după ciocnire (unidimensională), dacă coeficientul de restituție este k și coeficientul de frecare pentru ambele particule cu planul este μ ?

R. $l = \frac{m_2^2(1+k)^2}{2\mu g(m_1 + m_2)^2} \left(\frac{H^2}{m_1^2} - 2\mu g \xi_0 \right)$.

7. Pe o dreaptă sînt așezate în repaus n particule (bile) de mase m_1, m_2, \dots, m_n . I se imprimă primei particule o viteză v_1 , orientată de-a lungul dreptei spre celelalte particule. Considerînd ciocnirile plastice, să se afle viteza finală comună a particulelor. Dar dacă ciocnirea se face cu coeficientul de restituție k , care va fi viteza ultimei particule?

R. a) $v' = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$, b) $v'_n = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$

— sau $v' = \frac{m_1 m_2 \dots m_{n-1} (1+k)^{n-1}}{(m_1 + m_2)(m_2 + m_3) \dots (m_{n-1} + m_n)} v_1$.

8. O bilă de masă m cade liber în vid, fără viteză inițială, de la o înălțime h . Știm că la fiecare ciocnire cu podeaua coeficientul de restituție este k , iar timpul de contact cu podeaua constituie o fracțiune f din timpul de cădere respectiv, să se afle timpul total până la oprirea bilei și căldura totală degajată.

R.
$$T = \frac{1+k+f}{1-k} \sqrt{\frac{2h}{g}}; \quad Q = mgh.$$

9. Două bile de mase m_1, m_2 se mișcă pe direcții perpendiculare cu vitezele v_1 , respectiv v_2 . După ciocnire bila m_2 se oprește. Care va fi viteza primei bile după ciocnire?

R.
$$v_1' = \frac{1}{m_1} \sqrt{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2}.$$

10. Asupra unui punct material de masă m care are viteza \vec{v} acționează o forță de ciocnire în urma căreia viteza punctului devine \vec{v}' . Să se arate că lucrul mecanic efectuat de forța de ciocnire în timpul ciocnirii este $W = \Delta \vec{p} \cdot \vec{v}^*$, unde $\Delta \vec{p}$ este impulsul transferat punctului material, iar $\vec{v}^* = \frac{\vec{v} + \vec{v}'}{2}$.

11. Două bile de mase $m_1 = 0,20 \text{ kg}$, $m_2 = 0,40 \text{ kg}$ se mișcă cu vitezele $v_1 = 10 \text{ m/s}$, $v_2 = -15 \text{ m/s}$, una spre cealaltă. Forța de interacțiune dintre bile se poate aproxima printr-o linie frântă ca în fig. 4.10. Considerind ciocnirea unidimensională, să se calculeze căldura degajată prin ciocnire.

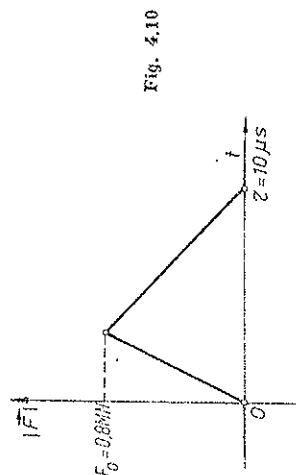


Fig. 4.10

tr-o linie frântă ca în fig. 4.10. Considerind ciocnirea unidimensională, să se calculeze căldura degajată prin ciocnire.

R.
$$v_1' = v_1 - \frac{F_0 \tau}{m_1}, \quad v_2' = v_2 + \frac{F_0 \tau}{m_2}, \quad Q = 40 \text{ J}.$$

CAPITOLUL 5 CINEMATICA SOLIDULUI RIGID

Toate corpurile din natură sînt mai mult sau mai puțin *deformabile*. Nu există corpuri absolut rigide. Atunci cînd în problema considerată se pot neglija deformările corpului, obținem aproximația solidului rigid (nedeformabil). La viteze foarte mari, apropiate de viteza luminii ($c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$), deformările corpurilor nu mai pot fi neglijate (orice corp este deformabil) și modelul solidului rigid nu mai este valabil (nu se aplică în mecanica relativistă).

5.1. TRANSLAȚIA ȘI ROTAȚIA

5.1.1. TRANSLAȚIA

Miscarea de translație a solidului este aceea mișcare în care orice dreaptă legată rigid de solid se mișcă paralel cu ea însăși.

Toate punctele corpului au traiectorii, viteze și accelerații identice, de aceea mișcarea de translație este complet determinată de mișcarea unui *singur punct* arbitrar al corpului (se aplică modelul punctului material). Viteza de translație este deci un vector *liber*, al cărui punct de aplicație poate fi ales în orice punct al corpului. De asemenea și accelerația de translație este un vector *liber*.

5.1.2. ROTAȚIA

Miscarea de rotație a solidului este aceea mișcare în care toate punctele solidului descriu cu aceeași viteză unghiulară cercuri paralele ale căror centre sînt situate pe o dreaptă, numită axă de rotație.

Viteza unghiulară $\omega = \dot{\theta}$, aceeași pentru toate punctele rigidului, se reprezintă printr-un *vector* de modul ω , situat de-a lungul axei de rotație în sensul dat de regula burghiului. Vectorul $\vec{\omega}$ este vector *glasant* (alunecător), al cărui punct de aplicație poate fi ales în orice punct al axei de rotație.

Alegând un punct arbitrar O pe axă și ducând vectorul de poziție $\vec{OP} = \vec{r}$, putem scrie (fig. 5.1):

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{R}. \quad (5.1)$$

În adevăr, direcția și sensul lui $\vec{\omega} \times \vec{r}$ corespund lui \vec{v} , iar ca modul

$$|\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega r \sin \alpha = \omega R.$$

În general mișcarea de rotație poate fi neuniformă și însăși axa de rotație se poate schimba. Vectorul accelerație unghiulară $\vec{\epsilon}$ este prin definiție:

$$\vec{\epsilon} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\omega}}. \quad (5.2)$$

Dacă vectorul $\vec{\omega}$ variază doar în modul, $\vec{\epsilon}$ va fi paralel cu $\vec{\omega}$, în același sens cu $\vec{\omega}$ dacă modulul $|\vec{\omega}|$ crește.

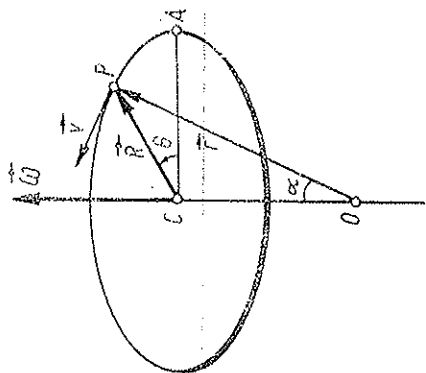


Fig. 5.1

5.2. PRODUSUL SCALAR ȘI PRODUSUL VECTORIAL

a) Expresia analitică a produsului scalar într-un SC ortogonal se obține astfel:

Deoarece

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1, \quad \vec{i}\vec{j} = \vec{j}\vec{k} = \vec{k}\vec{i} = 0, \quad (5.3)$$

rezultă imediat:

$$\vec{a}\vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z. \quad (5.4)$$

Pe de altă parte (notăm $[\vec{a}] = a, [\vec{b}] = b$):

$$\vec{a}\vec{b} = ab \cos(\vec{a}, \vec{b}), \quad \text{de unde} \quad \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{ab}. \quad (5.5)$$

Produsul scalar este nul, dacă vectorii sînt perpendiculari.

Exemplu:

$$\vec{a}^2 = \vec{a}\vec{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = a^2, \quad \vec{r}^2 = x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \quad (5.6)$$

(pătratul scalar \vec{a}^2 este egal cu pătratul modului a^2), de unde prin derivare în raport cu un parametru:

$$(\vec{a}^2)' = (a^2)' = 2(a_x\dot{a}_x + a_y\dot{a}_y + a_z\dot{a}_z) = 2\vec{a}\dot{\vec{a}} = 2a\dot{a}. \quad (5.7)$$

b) Expresia analitică a produsului vectorial într-un SC ortogonal se obține astfel:
Deoarece:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0, \quad \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \quad (5.8)$$

rezultă imediat:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) \times (b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = (a_yb_z - a_zb_y)\vec{i} + \\ &+ (a_zb_x - a_xb_z)\vec{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\vec{k} \end{aligned} \quad (5.9)$$

sau sub formă de determinant:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \quad |\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin(\vec{a}, \vec{b}). \quad (5.10)$$

Doi vectori paraleli au produsul vectorial nul.

c) Cu ajutorul formulelor de mai sus putem demonstra expresia produsului mixt, care este simetric la permutări circulare:

$$\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c}(\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \quad (5.11)$$

și dezvoltarea dublului produs vectorial:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}). \quad (5.12)$$

Produsul mixt este numeric egal cu volumul paralelipipedului construit pe cei trei vectori.

5.3. DEPLASAREA SISTEMULUI DE COORDONATE

5.3.1. DERIVATA UNUI VECTOR

Leună: Derivata unui vector variabil dar de modul constant este perpendiculară pe acest vector:

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = u^2 = \text{const}, \quad (\vec{u}^2)' = 2\vec{u}\dot{\vec{u}} = 0 \rightarrow \vec{u} \perp \dot{\vec{u}}. \quad (5.13)$$

Produsul scalar fiind nul, \vec{u} este perpendicular pe $\vec{\omega}$ (aici derivata poate fi în raport cu un parametru oarecare). Exemple am întâlnit la deducerea formulei (1.22) (derivata unui vector este un vector perpendicular pe acel vector) sau a lui a_n din fig. 1.11.

Dacă vectorul \vec{u} se mișcă prin translație, derivata sa este evident nulă, deoarece el nu suferă nici o variație: nici ca modul, nici ca direcție sau sens, de aceea excludem acest caz banal. Atunci un vector de modul constant nu se poate lungi sau scurta, ci doar *roți*. Ducând vectorul \vec{u} dintr-un punct fix, vârful său se va deplasa pe suprafața unei sfere de rază $|\vec{u}| = \text{const}$. Creșterea sa finită $\Delta\vec{u}$ va fi coardă (secantă) la sferă, iar creșterea *infinitesimală* $d\vec{u}$ va fi *tangentă* la această sferă, deci perpendiculară pe rază, adică pe \vec{u} (fig. 5.2). Prin urmare, în adevăr $\vec{u} = d\vec{u}/dt$ este perpendicular pe \vec{u} , ($\vec{u} \cdot d\vec{u} = 0$).

Derivata \vec{u} are semnificația vitezei de variație a vectorului \vec{u} sau a vitezei de deplasare a vârfului vectorului \vec{u} . De aceea se poate introduce viteza unghiulară [momentană (sau instantanee)] $\vec{\omega}$ de rotație a vectorului \vec{u} :

$$\vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{u}, \quad |\vec{u}| = \text{const}, \quad \vec{\omega} \perp \vec{u}. \quad (5.14)$$

Vectorul $\vec{\omega}$ nu este complet determinat, dar trebuie să fie situat într-un plan perpendicular pe \vec{u} pentru ca $\vec{\omega} \times \vec{u}$ să dea corect direcția derivatei \vec{u} , de exemplu:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{u^2} \vec{u} \times \dot{\vec{u}}, \quad (\vec{\omega} \perp \vec{u} \text{ și } \vec{\omega} \perp \dot{\vec{u}}). \quad (5.15)$$

Un exemplu este mișcarea de rotație a rigidului din fig. 5.1, în care vectorul de poziție \vec{r} are modul constant și derivata sa $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$ se exprimă prin (5.1).

Ținând seama că derivata unui vector de direcție fixă, variabil doar în modul, este *paralelă* cu vectorul, putem enunța teorema:

Derivata unui vector este în general oblică față de vector și se descompune într-o componentă longitudinală, paralelă cu vectorul dat, care provine din variația modului, și o componentă transversală, normală pe vectorul dat, care provine din variația direcției vectorului.

Exemple: Derivata vectorului de poziție $\vec{r} = \vec{v}$ (viteza) este oblică față de \vec{r} (v. § 8.5); derivata vitezei $\vec{v} = \vec{a}$ (acelerația) este oblică față de viteza \vec{v} ; derivata vitezei unghiulare $\vec{\omega} = \vec{\epsilon}$ (acelerația unghiulară) este oblică față de $\vec{\omega}$ (față de axa de rotație, dacă aceasta își schimbă direcția în spațiu).

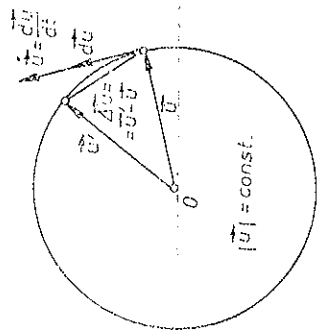


Fig. 5.2

5.3.2. FORMULELE LUI POISSON

Teoremă. Derivatele vectorilor unui SC ortogonal mobil se exprimă în fiecare moment prin produsele vectoriale

$$\begin{aligned} \dot{\vec{i}} &= \vec{\omega} \times \vec{i} = \omega_x \vec{j} - \omega_y \vec{k}, \\ \dot{\vec{j}} &= \vec{\omega} \times \vec{j} = -\omega_x \vec{i} + \omega_z \vec{k}, \\ \dot{\vec{k}} &= \vec{\omega} \times \vec{k} = \omega_y \vec{i} - \omega_z \vec{j}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

unde $\vec{\omega}$ este un vector unic determinat (în general variabil), adică rezultă dintr-o rotație *infinitesimală* cu viteza unghiulară *momentană* $\vec{\omega}$.

Vom arăta că există o rotație momentană $\vec{\omega}'$ care generează derivatele vectorilor conform formulelor (5.16) și că această rotație $\vec{\omega}$ este *unică*.

Să demonstrăm întâi *unicitatea*. Dacă există doi vectori $\vec{\omega}$ și $\vec{\omega}'$ care satisfac (5.16), atunci trebuie să avem

$$\vec{i} = \vec{\omega} \times \vec{i} = \vec{\omega}' \times \vec{i} \rightarrow (\vec{\omega} - \vec{\omega}') \times \vec{i} = 0$$

$$\text{sau} \quad (\omega_x - \omega'_x)\vec{j} - (\omega_y - \omega'_y)\vec{k} = 0$$

$$\text{deci} \quad \omega_x = \omega'_x, \quad \omega_y = \omega'_y$$

(un vector este nul dacă componentele sale sînt nule).

Analog, din expresiile celorlalte derivate rezultă că și $\omega_z = \omega'_z$, adică $\vec{\omega} \equiv \vec{\omega}'$.

Să demonstrăm acum *existența* vectorului $\vec{\omega}$ (în cazul translației lui SC, vectorii nu suferă nici o variație și evident $\vec{\omega} \equiv 0$).

Conform lemei precedente, $\dot{\vec{i}}$ este perpendicular pe \vec{i} , deci se descompune după versorii \vec{j}, \vec{k} . Analog se descompun celelalte derivate:

$$\dot{\vec{i}} = 0 + a_{12}\vec{j} + a_{13}\vec{k},$$

$$\dot{\vec{j}} = a_{21}\vec{i} + 0 + a_{23}\vec{k},$$

$$\dot{\vec{k}} = a_{31}\vec{i} + a_{32}\vec{j} + 0.$$

Deoarece însă,

$$\vec{i}\vec{j} = 0 \rightarrow (\vec{i}\vec{j}) = \vec{i}\vec{j} + \vec{j}\vec{i} = 0,$$

din primele două descompuneri, prin înmulțire scalară cu \vec{j} , respectiv \vec{i} , rezultă

$$\vec{i}\vec{j} = a_{12}, \quad \vec{j}\vec{j} = a_{21}, \quad \text{deci} \quad a_{21} = -a_{12}$$

și analog $a_{31} = -a_{13}$, $a_{32} = -a_{23}$. Prin urmare, matricea coeficienților a_{ij} este antisimetrică: $a_{ij} = -a_{ji}$ și depinde deci numai de 3 parametri independen-

denți. Prin comparație cu formulele (5.16) rezultă imediat că vectorul $\vec{\omega}$ căutat este

$$\omega_x = a_{23}, \quad \omega_y = a_{31}, \quad \omega_z = a_{12}, \quad \vec{\omega} = \vec{i}(a_{23}) + \vec{j}(a_{31}) + \vec{k}(a_{12}). \quad (5.17)$$

Observație. De fapt rotația este totdeauna descrisă de o matrice (tensor) antisimetrică $\omega_{ik} = -\omega_{ki}$ și numai în spațiul tridimensional i se poate asocia un vector dual $\vec{\omega}$ de-a lungul normalei la planul rotației (vector axial; mai sus $\omega_{ik} = a_{ik}$).

5.4. DISTRIBUȚIA VITEZELOR

5.4.1. FORMULELE LUI EULER

Să introducem un sistem de coordonate S' legat rigid (invariabil) de corp și care se mișcă deci solidar cu corpul, numit SC propriu. Conform fig. 5.3:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}', \quad \vec{r}' = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$$

unde \vec{r}' este fix față de S' (adică x', y', z' fixe), dar se mișcă față de sistemul de coordonate S , odată cu S' . Prin derivare obținem

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_0 + \dot{\vec{r}}', \quad \dot{\vec{r}} = \vec{v}_0, \quad \dot{\vec{r}}' = \vec{v}_0 + \dot{\vec{r}}' = x'\dot{\vec{i}}' + y'\dot{\vec{j}}' + z'\dot{\vec{k}}', \quad (5.18)$$

unde \vec{v}_0 este viteza punctului P , iar $\vec{v}_0 = \vec{v}_0 - \text{viteza punctului } O'$.

Aplicând formulele lui Poisson, avem

$$\dot{\vec{r}}' = x'\dot{\vec{\omega}} \times \vec{i}' + y'\dot{\vec{\omega}} \times \vec{j}' + z'\dot{\vec{\omega}} \times \vec{k}' = \vec{\omega} \times \vec{r}', \quad (5.19)$$

astfel încât obținem formulele lui Euler:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}' = \vec{v}_0 + \\ &+ \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_0) = \vec{v}_0 + \vec{v}_{rot}, \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_0 &= \vec{v}_0, \quad \vec{v}_{rot} = \vec{\omega} \times \vec{r}' = \\ &= \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_0), \end{aligned} \quad (5.21)$$

ceea ce înseamnă că deplasarea infinitesimală a solidului $d\vec{r} = \vec{v} dt$ se descompune în fiecare moment într-o translație infinitesimală $d\vec{r}_0 = \vec{v}_0 dt$ și o rotație infinitesimală $d\vec{r}' = \vec{v}_{rot} dt$ în jurul unei axe trecând prin O' , cu viteza unghiulară $\vec{\omega}$ (\vec{v}_0 și $\vec{\omega}$ sînt în general funcții de timp).

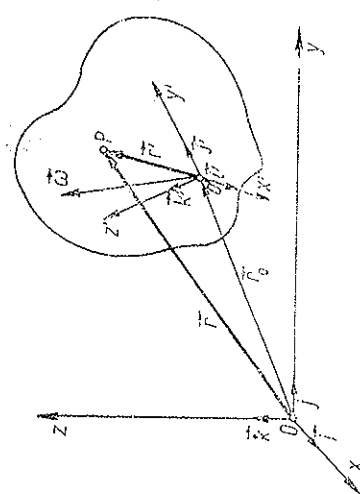


Fig. 5.3

În fiecare moment viteza oricărui punct P al rigidului este egală cu viteza unui alt punct oarecare O' al rigidului, \vec{v}_0 , plus o viteză de rotație în jurul unei axe trecând prin acel punct O' , $\vec{v}_{rot} = \vec{\omega} \times \vec{r}'$, adică mișcarea rigidului se descompune în mișcarea de translație a unui punct oarecare al rigidului plus o rotație în jurul unei axe trecând prin acest punct.

Descompunerea în translație și rotație se poate face într-o infinitate de moduri după alegerea arbitrară a punctului de reducere O' numit *pol*, și plasaarea acolo a axei de rotație, adică a vectorului $\vec{\omega}$.

5.4.2. INVARIANTII

Vom demonstra că oricare ar fi descompunerea, viteza unghiulară $|\vec{\omega}|$, direcția axei de rotație și componenta translației în direcția axei de rotație, sînt aceleași (fig. 5.4).

Teorema 1. *Viteza unghiulară $\vec{\omega}$ este o caracteristică intrinsecă a mișcării corpului, adică modulul și direcția vectorului $\vec{\omega}$ sînt independente de sistemul de coordonate S' propriu ales, doar axa de rotație se deplasează paralel cu ea însăși în noul pol ales. Cu alte cuvinte, prin schimbarea polului, vectorul $\vec{\omega}$ se deplasează eclipotent în noul pol.*

În adevăr, putem trece de la S' inițial la oricare altul S'' în două etape: întâi rotim S' astfel încît axele să devină paralele cu S'' , atunci $\vec{\omega}$ devine $\vec{\omega}'$ față de S' rotit, dar din condiția

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}' = \vec{v}_0 + \vec{\omega}' \times \vec{r}',$$

rezultă

$$(\vec{\omega} - \vec{\omega}') \times \vec{r}' = 0 \rightarrow \vec{\omega} = \vec{\omega}';$$

deoarece \vec{r}' este arbitrar. Acum trecem de la acest sistem rotit la cel final S'' , printr-o translație. Dar o translație nu afectează derivatele versorilor, deci $\vec{\omega}'$ nu se schimbă și rămîne egal cu $\vec{\omega}$.

Teorema 2. *Toate punctele corpului au în fiecare moment aceeași proiecție (componentă longitudinală) a vitezei pe axa de rotație, independentă de S' propriu ales. Aceasta este cea de-a doua caracteristică intrinsecă a mișcării corpului.*

În adevăr, înmulțind relația (5.20) scalar cu $\vec{\omega}$ și ținînd seama că $\vec{\omega} \times \vec{r}' = \vec{v}_{rot}$ este perpendicular pe $\vec{\omega}$ și deci produsul lor

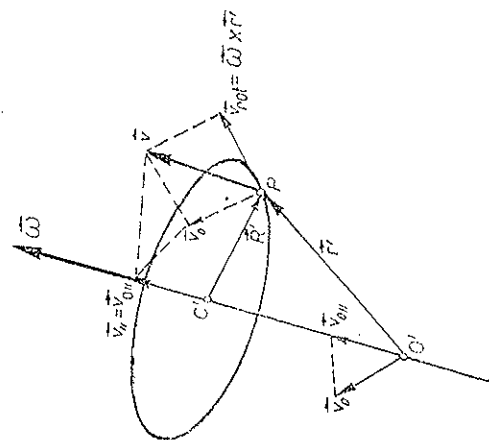


Fig. 5.4

scalar este nul, obținem

$$\vec{\omega} \vec{v} = \vec{\omega} \vec{v}_0, \text{ adică } \omega v \cos(\vec{\omega}, \vec{v}) = \omega v_0 \cos(\vec{\omega}, \vec{v}_0),$$

de unde

$$v_{||} = v \cos(\vec{\omega}, \vec{v}) = v_0 \cos(\vec{\omega}, \vec{v}_0). \quad (5.22)$$

Prin urmare, toate punctele corpului au aceeași proiecție $v_{||}$ a vitezei pe axa de rotație, adică aceeași componentă longitudinală a vitezei, egală cu viteza de translație de-a lungul axei de rotație, $v_{0||}$. Deoarece viteza de translație este viteza punctului ales drept pol și deoarece axa de rotație se poate deplasa doar *paralel*, este clar că oriunde am alege polul obținem aceeași componentă longitudinală a translației — rotația generează numai viteze *perpendiculare* pe axa de rotație!

În rezumat, putem deplasa vectorul $\vec{\omega}$ *paralel* cu el însuși (echipotent), schimbând polul și schimbând *corespunzător* doar componenta *transversală* a translației, cea longitudinală neputând fi schimbată. Produsul scalar $\vec{\omega} \vec{v}$ este un invariant.

Observație. Introducerea sistemului propriu S' ne-a servit aici doar ca un artificiu pentru a putea aplica formulele lui Poisson, deci a arăta existența unui $\vec{\omega}$ unic pentru rigid (5.19) și a deduce astfel formulele lui Euler (5.20), de aceea toate formulele care urmează se referă la SL .

Exemplu. Mișcarea de rostogolire fără alunecare a unui cilindru de rază R pe un plan poate fi privită ca o rotație cu viteza unghiulară ω în jurul axei cilindricului plus o translație cu viteza $v = \omega R$, perpendiculară pe axă, deci $v_{||} = 0$, sau, altfel, ca o rotație de *aceeași* viteză unghiulară ω în jurul generatoarei de contact cu planul (axă momentană de rotație, mobilă; Descartes 1638) și *fără* viteză de translație, ș.a.m.d.

5.5. MIȘCAREA ELICOIDALĂ

Teorema lui Chasles : *Mișcarea infinitezimală a unui rigid se descompune, în fiecare moment, într-o rotație infinitezimală în jurul unei axe instantanee și o translație infinitezimală de-a lungul acestei axe (mișcare elicoidală momentană).*

În adevăr, dacă translația momentană \vec{v}_0 (viteza punctului O') nu este paralelă cu axa de rotație $\vec{\omega}$ din O' , putem anula componenta transversală a translației deplasând *paralel* axa de rotație în punctul următor:

$$\vec{r}_c = \vec{r}_0 + \vec{r}_c', \quad \text{unde } \vec{r}_c' = \frac{1}{\omega^2} \vec{\omega} \times \vec{v}_0. \quad (5.23)$$

Noua viteză de translație \vec{v}_c dată de acest pol \vec{r}_c este egală cu componenta longitudinală a lui \vec{v}_0 , adică este paralelă cu noua axă de rotație $\vec{\omega}$, dusă prin \vec{r}_c' . În adevăr, folosind formula dezvoltării produsului vectorial dublu (5.12), avem pentru viteza punctului \vec{r}_c :

$$\vec{v}_c = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_c' = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \frac{1}{\omega^2} (\vec{\omega} \times \vec{v}_0) = \vec{\omega} \left(\frac{\vec{\omega} \vec{v}_0}{\omega^2} \right), \quad (5.24)$$

deci \vec{v}_c este paralel cu $\vec{\omega}$.

Viteza de translație \vec{v}_0 în lungul axei de rotație $\vec{\omega}$ coincide cu proiecția vitezelor \vec{v} pe axa $\vec{\omega}$: înmulțind (5.24) scalar cu $\vec{\omega}$ avem, conform lui (5.22),

$$\omega v_c = \vec{\omega} \vec{v}_c = \vec{\omega} \vec{v}_0 = \omega v_{||}, \quad (\vec{\omega}_c = \vec{\omega}) \rightarrow v_c = v_{||} = v_0 \cos(\vec{\omega}, \vec{v}_0). \quad (5.25)$$

Prin urmare, *în fiecare moment, corpul execută o mișcare elicoidală infinitezimală*, analogă mișcării unui șurub (șurub drept dacă $\vec{\omega} \vec{v} > 0$ și stâng dacă $\vec{\omega} \vec{v} < 0$). Axă elicoidală (I. Mozzi 1766) este locul geometric al punctelor care au viteza minimă în momentul considerat.

Dacă $\vec{v}_0, \vec{\omega}$ sînt constante, mișcarea elicoidală se numește *uniformă*. Dacă în plus $v_0 = 0$, mișcarea este o rotație uniformă. În general însă, axa elicoidală variază atît față de corp, descriind o suprafață riglată numită *axoidă mobilă*, cît și față de reperul fix, descriind o suprafață riglată numită *axoidă fixă*.

În fiecare moment deplasarea solidului reprezintă o rostogolire a axoidelor mobile, legată rigid de corp, peste axoida fixă, în jurul axei elicoidale $\vec{\omega}_c$ (generatoarea de contact dintre axoide) plus o translație \vec{v}_c de-a lungul acestei axe (Louis Poincaré 1834).

5.6. DISTRIBUȚIA ACELERAȚIILOR

Derivînd (5.20) și folosind (5.19), obținem:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{v}' = \vec{v}_0' + \vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'' = \vec{v}_0' + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = \\ &= \vec{a}_0 + \vec{a}_\varepsilon + \vec{a}_\omega, \end{aligned} \quad (5.26)$$

$$\vec{a}_0 = \vec{v}_0', \quad \vec{a}_\varepsilon = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}', \quad \vec{a}_\omega = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = \vec{\omega} \times \vec{v}_{rot}. \quad (5.27)$$

Primul termen reprezintă accelerația *translației* $\vec{a}_0 = \vec{v}_0'$. Al doilea termen reprezintă contribuția accelerației *unghiulare* $\vec{\varepsilon} = \vec{\omega}'$, datorită neuniformității rotației, se numește accelerație „*rotitoare*” și se anulează în cazul rotației uniforme cînd $\vec{\omega} = \text{const}$. Al treilea termen reprezintă accelerația „*axipetă*”, perpendiculară pe axa de rotație (a nu se confunda cu accelerația \vec{a}_n , perpendiculară pe traiectorie).

În adevăr, fie \vec{n}' versorul normalei, coborîte din punctul P pe axa de rotație și R' distanța punctului P pînă la axă: $\vec{R}' = \vec{C}'\vec{P} = -R'\vec{n}'$. A nu se confunda versorul $\vec{n}' \perp \vec{\omega}$ cu versorul al normalei principale la traiectorie, și distanța R' pînă la axa $\vec{\omega}$ cu raza de curbură R a traiectoriei.

Atunci $\vec{r}' = \vec{O}'\vec{C}' + \vec{R}'$ (fig. 5.5) și ultimul termen din (5.26) devine $(\vec{v}_{rot} = \vec{\omega} \times \vec{r}') = \vec{\omega} \times \vec{R}'$:

$$\begin{aligned} \vec{a}_\omega &= \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}') = \\ &= -\omega^2 \vec{R}' = -\omega^2 R' \vec{n}' \end{aligned} \quad (5.28)$$

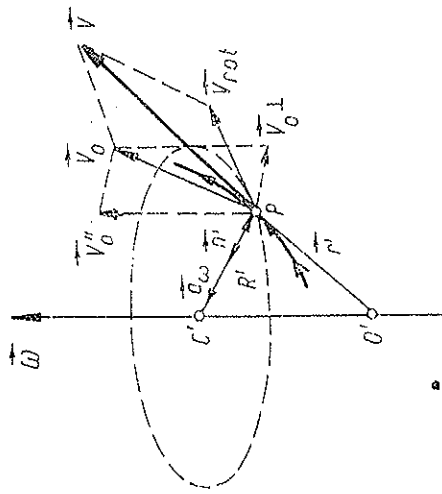


Fig. 5.5

(deoarece $\vec{\omega} \times O'C' = 0$ și $\vec{\omega} R' = 0$), deci reprezintă o accelerație perpendiculară pe axa de rotație:

$$\vec{a}_o = -\omega^2 R' = \vec{\omega} \times \vec{v}_{rot} = -\frac{1}{R'^2} v_{rot}^2 \vec{R}', \quad (5.29)$$

$$a_o = \omega^2 R' = \omega v_{rot} = \frac{1}{R'} v_{rot}^2 \quad (v_{rot} = \omega R').$$

Acum (5.26) se mai poate scrie astfel:

$$\vec{a} = \vec{a}_o + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}' - \omega^2 \vec{R}' \quad (\text{teorema lui Rivals}). \quad (5.30)$$

Exemple. a) Dacă direcția axei de rotație (deci a vectorului $\vec{\omega}$) nu se schimbă, $\vec{\varepsilon} = \vec{\omega}$ va fi paralel cu $\vec{\omega}$ și $\vec{a}_\varepsilon = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}' = \vec{\omega} \times \vec{r}'$. În acest caz \vec{a}_ε și \vec{a}_o sunt exact accelerațiile tangențială și normală în mișcarea de rotație momentană a rigidului în jurul axei trecind prin pol, adică accelerația oricărui punct al rigidului este egală cu accelerația unității alt punct carecarea (pol.) al rigidului \vec{a}_o , plus accelerația ($\vec{a}_\varepsilon + \vec{a}_o = \vec{a}_t + \vec{a}_n$) care provine din rotația momentană a rigidului în jurul unei axe trecind prin pol, analog descompunerii vitezelor.

b) În cazul mișcării de rotație în jurul unei axe fixe, fără translație: $a_o = 0$, $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$ și $\vec{a}_\varepsilon = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}' = \vec{\omega} \times \vec{r}'$ coincide cu accelerația tangențială \vec{a}_t , iar $\vec{a}_o = -\omega^2 \vec{R}'$ coincide cu accelerația normală \vec{a}_n . În acest caz $\vec{n}' = \vec{n}$ — versorul normalei principale la traiectorie, $R' = R$ — raza de curbă (ca la mișcarea circulară) (fig. 1.12) și accelerația devine:

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = \vec{a}_t + \vec{a}_o = \vec{a}_t + \vec{a}_n, \quad \vec{a}_t = \varepsilon R, \quad (5.31)$$

$$\vec{a}_\omega = \vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{v}_{rot} = -\omega^2 \vec{R} = -\frac{1}{R^2} v_{rot}^2 \vec{R}, \quad a_n = \omega^2 R,$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = R \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad (R' = R).$$

e) În cazul mișcării elicooidale uniforme ($\vec{v}_o \parallel \vec{\omega}$): $\vec{a}_o = 0$, $\vec{\varepsilon} = 0$ și \vec{a} coincide cu \vec{a}_n ($\vec{n}' = \vec{n}$, $R' = R$ — raza cilindriului pe care este înfășurată elicea, R — raza de curbă a traiectoriei, adică a elicei) (fig. 5.6):

$$\vec{a} = \vec{a}_\omega = \vec{a}_n = -\frac{v^2 \sin^2 \alpha}{R'} \vec{n} = -\frac{v^2 \sin^2 \alpha}{R} \vec{n}, \quad R = R / \sin^2 \alpha, \quad (5.32)$$

unde α este unghiul dintre \vec{v} și $\vec{\omega}$ (unghiul de inclinare al elicei), iar $R = R' / \sin^2 \alpha$ este raza de curbă a elicei.

În general însă, \vec{a}_ε nu coincide cu accelerația tangențială \vec{a}_t și \vec{a}_o nu coincide cu accelerația normală \vec{a}_n .

5.7. MIȘCAREA PLAN-PARALELĂ

În această mișcare traiectoriile punctelor solidului sînt paralele cu un plan fix. Toate punctele solidului sîntuate pe o normală la acel plan se mișcă identic. De aceea mișcarea plan-paralelă se reduce la miș-

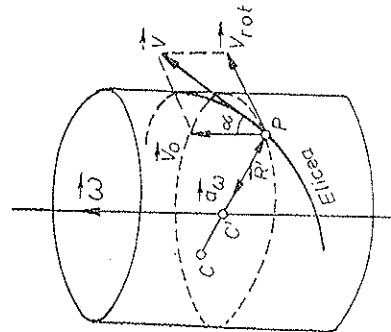


Fig. 5.6

careea unei figuri plane (o secțiune a corpului paralelă cu planul fix) în planul său (mișcare plană).

Vectorii \vec{r} , \vec{v} , \vec{a} sînt conținuți în planul figuri (Oxy), iar vectorii $\vec{\omega}$ și $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$ sînt perpendiculari pe plan ($\vec{k} = 0$). Notăm $\omega_z = \omega$, $\varepsilon_z = \varepsilon$; $\omega > 0$ înseamnă rotația în sens trigonometric.

5.7.1. DISTRIBUȚIA VITEZELOR

În fiecare moment mișcarea corpului se compune din mișcarea unui punct arbitrar al său plus o rotație momentană în jurul acestui punct (pol), adică viteza oricărui punct este egală cu viteza polului (ales arbitrar) plus o viteză de rotație momentană în jurul polului.

Translația, fiind conținută în planul figuri, este perpendiculară pe axa de rotație, deci poate fi desființată, mutind axa convenabil într-un punct C care se cheamă centru instantaneu de rotație (în planul fix) sau centrul vitezelor (în planul mobil al figuri), deoarece viteza sa este nulă în acel moment (fig. 5.7). În cazul translației pure a figuri centrul instantaneu este aruncat la infinit pe direcția perpendiculară pe translație.

Vectorul de poziție sau coordonatele centrului instantaneu C sînt date de (5.23):

$$\vec{r}_c = \vec{r}_0 + \frac{1}{\omega^2} \vec{\omega} \times \vec{v}_0,$$

$$\vec{r}'_c = \frac{1}{\omega^2} \vec{\omega} \times \vec{v}_0, \quad (5.33)$$

deoarece viteza acestui punct, \vec{v}_c (5.24), în cazul mișcării plane este nulă ($\vec{\omega} \vec{v}_0 = 0$). Luînd pe C drept pol, avem $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}'$, ($\vec{r}' = \vec{CP}$), adică vitezele tuturor punctelor figuri sînt în fiecare moment perpendiculare pe razele care le unesc cu centrul instantaneu C și au valoarea $\omega r' = \omega \cdot CP$, ceea ce corespunde rotației momentană a figuri în jurul centrului C cu viteza unghiulară momentană ω (fig. 5.8).

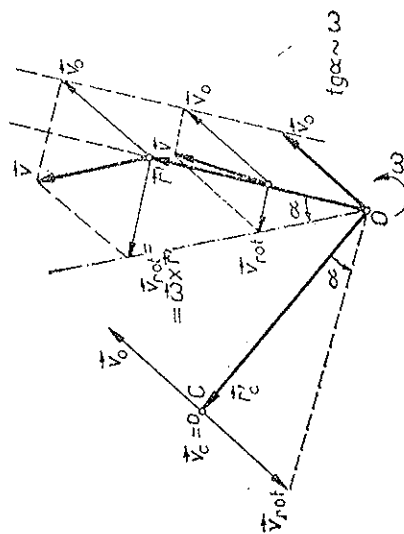


Fig. 5.7

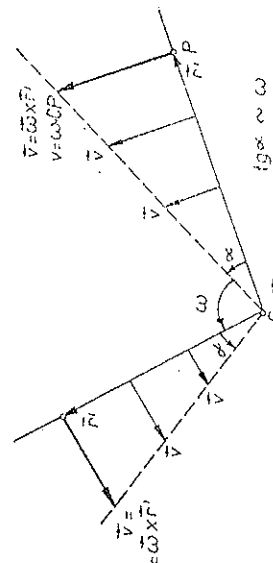


Fig. 5.8

Locul geometric al centrelor instantanee de rotație se numește *centroidă fixă* (sau *bază*) în S , respectiv *centroidă mobilă* (rostogolitoare sau *rulantă*) în S' . Axoidele rigidului sînt în cazul nostru suprafețe cilindrice cu generatoarele perpendiculare pe planul dat, iar intersecția lor cu acest plan dă centroidele.

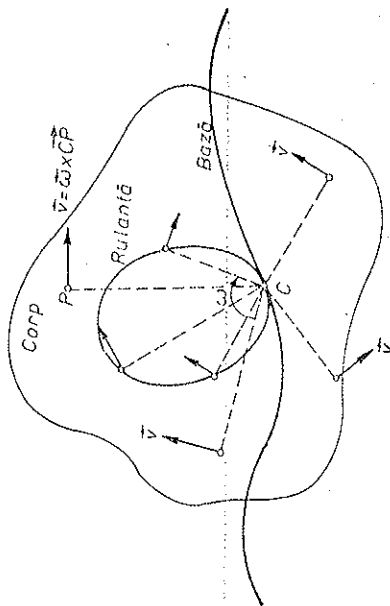


Fig. 5.9

În fiecare moment mișcarea figurii plane reprezintă o rostogolire fără luncare a rulantei peste bază (mișcare epicicloidală). Punctul lor de contact este centrul instantaneu de rotație C (centrul vitezelor).

Exemplu: Rostogolirea fără luncare a unui cerc (elipsă, parabolă etc.) peste o curbă fixă (linie dreaptă, alt cerc etc.) (fig. 5.9).

5.7.2. DISTRIBUȚIA ACCELERAȚIILOR

Formula accelerațiilor (5.30) devine în cazul plan:

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}_e + \vec{a}_\omega = \vec{a}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}' - \omega^2 \vec{r}', \quad (5.34)$$

unde $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$ este perpendicular pe plan ca și $\vec{\omega}$, deci \vec{a}_e este perpendicular pe \vec{r}' , iar \vec{a}_ω este centripet către pol.

În fiecare moment accelerația oricărui punct este egală cu accelerația polului ales arbitrar (\vec{a}_0) plus o accelerație datorită rotației momentane în jurul polului ($\vec{a}_e + \vec{a}_\omega = \vec{a}_r + \vec{a}_n$).

Există în fiecare moment un punct W a cărui accelerație este nulă în acel moment, numit centrul accelerațiilor. Din (5.34) rezultă atunci pentru acest punct (fig. 5.10):

$$\begin{aligned} \vec{a}_0 = 0 \rightarrow \vec{a}_0 &= -\vec{a}_e - \vec{a}_\omega, \quad \vec{a}_e \perp \vec{a}_\omega, \\ |\vec{a}_0| &= |\vec{\varepsilon} \times \vec{r}' - \omega^2 \vec{r}'| = r' \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \\ r'_\omega &= \frac{a_0}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}, \quad \text{tg } \beta = \frac{a_e}{a_\omega} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}, \quad r'_\omega = \frac{\omega^2 \vec{a}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{a}_0}{\varepsilon^2 + \omega^4}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

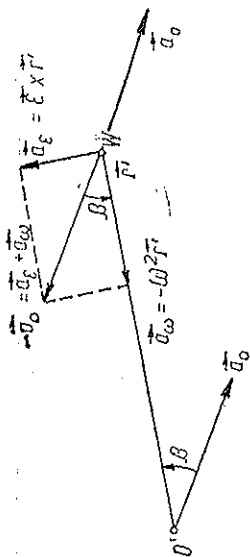


Fig. 5.10

Observăm că, spre deosebire de centrul vitezelor C , poziția lui W depinde de neuniformitatea rotației (de ε). În cazul rostogolirii uniforme ($\varepsilon = 0$) a rulantei peste bază, centrul accelerațiilor se numește centrul *geometric* al accelerațiilor (G).

Luând pe W drept pol (fig. 5.11), rezultă imediat că accelerațiile tuturor punctelor fac același unghi β (tg $\beta = \varepsilon/\omega^2$, independent de r') cu razele care le unesc cu centrul accelerațiilor W și au valoarea $a = r' \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$, ceea ce corespunde unei rotații momentane a figurii în jurul centrului W cu viteza și accelerația unghiulare momentane ω și ε .

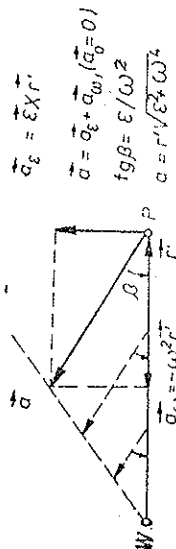


Fig. 5.11

Cele două rotații momentane ale figurii, considerate din punctul de vedere al distribuției vitezelor și cel al distribuției accelerațiilor, sînt deci *distante* ($C \neq W$).

5.7.3. MIȘCAREA SFERICĂ

Un alt caz particular de mișcare a rigidului este mișcarea rigidului care are un *punct fix* (mișcarea sferică). În acest caz axoidele devin *conuri* cu vârful comun în punctul fix și mișcarea este reprezentată prin rostogolirea fără luncare a conului mobil peste conul fix.

PROBLEME

1. Folosind formulele lui Prénd:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{\vec{r}}{R}, \quad \frac{d\vec{n}}{ds} = -\frac{\vec{t}}{R} + \frac{\vec{b}}{T}, \quad \frac{d\vec{b}}{ds} = -\frac{\vec{n}}{T},$$

un alt cerc de diametru $CT = \omega a_c / e$ (CT este tangenta comună a axoizelor). Cele două cercuri se taie în C și W (fig. 5.15).

5. Să se demonstreze relațiile:

$$\vec{\omega} = \vec{u}_c \times \left(\frac{\vec{n}}{R} - \frac{\vec{n}'}{R'} \right), \quad \frac{1}{CG} = \frac{1}{R'} - \frac{1}{R}, \quad (u_c = \omega \cdot CG),$$

unde \vec{n} , \vec{n}' , R , R' sînt versorii normalelor, respectiv razele de curbură ale axoizelor în punctul de contact C (centrul vitezelor), u_c este viteza de deplasare a centrului C pe bază; iar G este centrul geometric al accelerațiilor.

6. Fie planul mobil legat solid de axele intrinseci $P(\vec{t}, \vec{n})$ ale unui mobil P care se mișcă cu viteza v pe traiectoria sa plană. Să se arate că: a) $\omega = v/R$, unde R este raza de curbură; b) centrul vitezelor C este în centrul de curbură; c) accelerația tangențială a mobilului $a_t =$

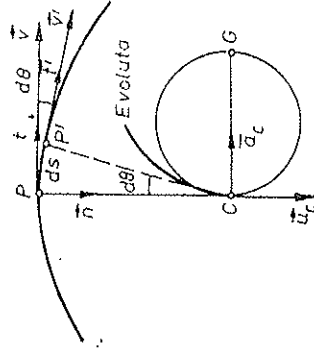


Fig. 5.16

$= v = \omega R + \omega R$; d) accelerația punctului C este $a_c = \omega R$ și este paralelă cu \vec{n} ; e) viteza centrului C pe bază este $u_c = R$ și este paralelă cu \vec{n} (fig. 5.16).

7. Un cerc de rază R se rostogolește fără alunecare pe axa Ox cu viteza u . Să se afle: a) baza și rostogolitoarea, poziția centrului vitezelor; b) viteza ω și accelerația α ale cercului; c) coordonatele unui punct P de pe cerc în funcție de unghiul θ dintre raza GP și verticala GC (fig. 5.17);

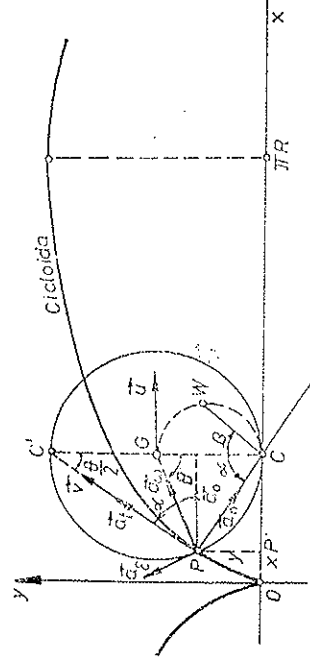


Fig. 5.17

d) vitezele $u_{x,y}$, v ale punctului P ; e) descompunerea vitezelor față de G ; f) unghiul $\alpha = \angle(\vec{v}, \vec{u})$; g) viteza v' a punctului superior C' ; h) accelerațiile $a_{x,y}$; i) descompunerea accelerațiilor față de G ; j) pozițiile centrelor accelerațiilor; k) accelerația normală \vec{a}_n și poziția centrului de curbură K al traiectoriei (cicloidei); l) lungimea s_0 a unei bucle a cicloidei.

unde T este raza de torsiune, și formulele lui Poisson, să se arate că mișcarea triedrului Frénet asociat mobilului P în mișcarea sa pe traiectorie cu viteza v este o mișcare cicloidală cu parametri:

$$\vec{v}_0 = v \frac{R(Rt + T\vec{b})}{R^2 + T^2}, \quad \vec{\omega} = v \left(\frac{\vec{t}}{T} + \frac{\vec{b}}{R} \right), \quad \text{axa elicoidală } \vec{\omega} \text{ trece prin punctul } PH = \frac{R\vec{r}}{1 + R^2/T^2} \quad (\text{fig. 5.12}).$$

2. Capetele unei tijă AB de lungime l alunecă pe două drepte ortogonale Oxy . Să se afle: a) centrul vitezelor C ; b) baza și rostogolitoarea; c) centrul geometric al accelerațiilor G . R. Fig. 5.13.

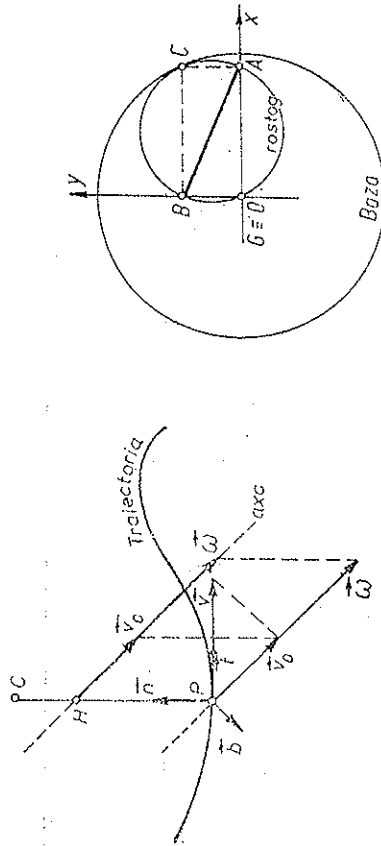


Fig. 5.12

3. Să se arate că: a) punctul C' al rigidului care coincide la un moment dat cu centrul vitezelor C are în acel moment accelerația $\vec{a}_{c'} = -\omega \times \vec{u}_c$ unde \vec{u}_c este viteza de deplasare a centrului C pe bază; b) traiectoria lui C' are în C un punct de întoarcere cu tangenta perpendiculară pe bază și rostogolitoare (după normala lor comună); c) accelerația de mai sus este îndreptată spre centrul geometric al accelerațiilor G a cărei poziție este dată de vectorul (fig. 5.14):

$$\vec{CG} = -\frac{\vec{\omega} \times \vec{u}_c}{\omega^2}, \quad CG = \frac{u_c}{\omega}, \quad (\vec{u}_c = \vec{\omega} \times \vec{CG}).$$

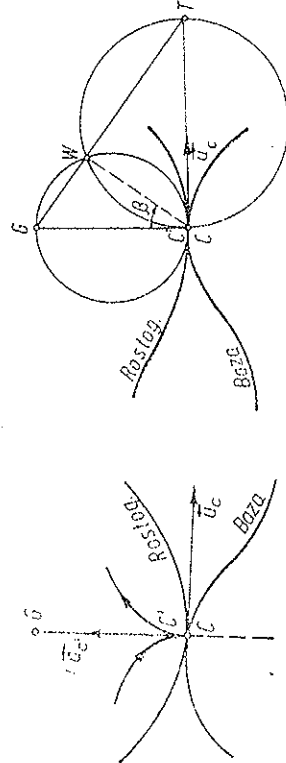


Fig. 5.14

4. Să se arate că punctele figurii plane care au la un moment dat accelerația normală nulă se găsesc pe cercul de diametru CG (numit cercul inflexiunilor, deoarece traiectoriile au acolo puncte de inflexiune), iar punctele figurii care au accelerația tangențială nulă se găsesc pe

R. a) Baza este axa Ox , iar rostogolitoarea este cercul; centrul vitezelor în C ; b) $\omega = u/R$, $z = u/R$; c) cicloida: $x = R(\theta - \sin \theta)$, $y = R(1 - \cos \theta) = 2R \sin^2 \frac{\theta}{2}$; d) $v_x = u(1 - \cos \theta) = 2u \sin^2 \frac{\theta}{2}$, $v_y = u \sin \theta$, $v = 2u \sin \frac{\theta}{2}$; e) $\vec{v} = \vec{u} + \omega \times \vec{GP}$, $\vec{v}_{\text{rot}} = u(-\cos \theta, \sin \theta)$; f) $\alpha = \frac{1}{R} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R} \frac{u}{v} = \frac{1}{R} \frac{u}{2u \sin \frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2R \sin \frac{\theta}{2}}$; g) $\vec{v}' = 2\vec{u}$; h) $a_x = u(1 - \cos \theta) + \frac{1}{R} u^2 \sin^2 \theta$, $a_y = u \sin \theta + \frac{1}{R} u^2 \cos \theta$; i) $\vec{a}_0 = (u, 0)$, $\vec{a}_e = u(-\cos \theta, \sin \theta)$ tangență la cerc ($\perp \vec{GP}$), $\vec{a}_\omega = -\omega^2 \vec{GP} = -\frac{1}{R} u^2 (\sin \theta, \cos \theta)$ radială (centripetă) spre G ; j) $u_g = u$, $CG = u/\omega = R$, deci în centrul cercului; $CW = R \cos \beta$, unde $\tan \beta = u/\omega^2 = u/R(u^2)$; k) $a_n = \frac{1}{R} u^2 \sin \frac{\theta}{2}$, $PW = 2PC$; l) $s_g = 8R$.

CAPITOLUL 6

DINAMICA SOLIDULUI RIGID

După cum am văzut, mișcarea solidului rigid se descompune într-o mișcare de *translație* și o mișcare de *rotație* în jurul unei axe instantanee:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_{\text{rot}} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}', \quad \vec{r}' = \vec{\omega} \times \vec{r}' = \vec{v}_{\text{rot}}. \quad (6.1)$$

Dinamica mișcării de translație coincide cu dinamica punctului material. Să studiem acum *dinamica mișcării de rotație* a solidului rigid în jurul axei instantanee.

6.1. ENERGIA CINETICĂ DE ROTAȚIE

Alegând un SC cu originea O pe axa de rotație (fig. 6.1); omitem aici accentele de pe coordonate pentru simplificare), să calculăm energia cinetică de rotație a rigidului:

$$E_{\text{rot}} = \sum_k \frac{1}{2} m_k v_{\text{rot},k}^2 \quad \text{sau} \quad E_{\text{rot}} = \int \frac{1}{2} v_{\text{rot}}^2 dm. \quad (6.2)$$

Ținând seama că vitezele particulelor sînt

$$\vec{v}_{\text{rot},k} = \vec{\omega} \times \vec{r}_k = \vec{\omega} \times \vec{R}_k, \quad v_{\text{rot},k} = \omega R_k, \quad (6.3)$$

unde \vec{r}_k sînt vectorii de poziție și R_k distanțele particulelor m_k pînă la axa de rotație, obținem

$$E_{\text{rot}} = \sum_k \frac{1}{2} m_k R_k^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2, \quad (6.4)$$

unde

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \sum_k m_k R_k^2 \quad (6.5)$$

este momentul de inerție al rigidului față de axa de rotație (Ch. Huygens 1673).

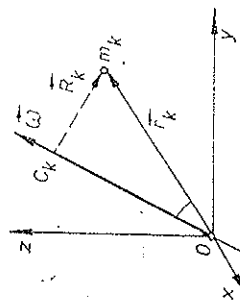


Fig. 6.1

În cazul distribuției continue de masă, suma de mai sus se înlocuiește cu integrala:

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \int R^2 \rho \, dV, \quad (dm = \rho dV), \quad (6.6)$$

unde R este distanța elementului de masă $dm = \rho \, dV$ până la axa de rotație,

6.2. MOMENTUL DE INERȚIE FAȚĂ DE O AXĂ

Momentul de inerție este o mărime *aditivă* în sensul că este egală cu *suma* momentelor de inerție ale *particulelor* componente ale corpului. Momentul de inerție al unui *punct material* față de o axă este egal cu produsul dintre masa punctului material și pătratul distanței sale până la axă: mR^2 (fig. 6.2):

$$I = \sum I_k = \sum m_k R_k^2, \quad \text{unde } I_k = m_k R_k^2. \quad (6.7)$$

Se numește *rază de inerție* sau de *girație* față de o axă, distanța R , definită prin relația:

$$I = \sum m_k R_k^2 = m R_g^2 \quad \text{sau} \quad I = \int R^2 dm = m R_g^2, \quad (m = \sum m_k), \quad (6.8)$$

$$R_g^2 = \frac{1}{m} \sum m_k R_k^2 \quad \text{sau} \quad R_g^2 = \frac{1}{m} \int R^2 dm, \quad R_g \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{I/m}, \quad (6.9)$$

adică *rază de inerție* R_g este *distanța de la axa dată unde ar trebui concentrată toată masa corpului pentru a da același moment de inerție față de aceea axă*.

Dacă cunoaștem masele părților componente M_j și razele lor de girație r_{gj} față de o axă, atunci momentul de inerție al corpului întreg (compus) față de aceea axă este evident:

$$I = \sum_j M_j r_{gj}^2 = \sum_j I_j, \quad I_j = M_j r_{gj}^2, \quad (6.10)$$

fiindcă oricesumă *parțială* $\sum m_k R_k^2$

poate fi înlocuită cu momentul de inerție $M_j r_{gj}^2$.

Dimensiunile momentului de inerție sînt:

$$[I] = [m][R^2] = ML^2 = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \text{ în SI.} \quad (6.11)$$

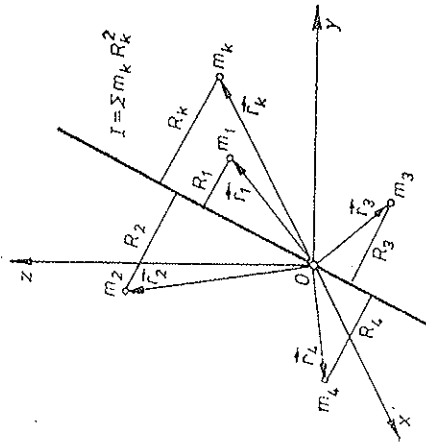


Fig. 6.2

Comparînd expresiile energiei cinetice de translație și de rotație:

$$E_{\text{tr}} = \frac{1}{2} m v_{\text{tr}}^2, \quad E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2, \quad (6.12)$$

se vede că rolul masei m din mișcarea de translație îl joacă în mișcarea de rotație momentul de inerție I față de axa de rotație.

Așa cum masa unui corp este o măsură a inerției sale în mișcarea de translație, tot astfel *momentul de inerție față de o axă este o măsură a inerției corpului la mișcarea de rotație în jurul acelei axe*.

Valoarea momentului de inerție depinde nu numai de mărimea masei, ci și de modul cum sînt distribuite ele (adică distanțele lor) față de axa de rotație. La o aceeași masă totală, corpul care are *masele mai depărtate* de axă va avea un moment de inerție mai mare, de exemplu, momentul de inerție al unui inel (cilindru gol) este mai mare decît al unui disc (sau cilindru) omogen din același material și de *aceeași* masă, față de axa lor de simetrie. Pentru a obține un moment de inerție cît mai mare, materialul trebuie distribuit cît mai departe de axa de rotație.

6.3. LUCRUL MECANIC.

PUTEREA

Lucrul mecanic elementar efectuat de forțele aplicate rigidului în rotație (la rigid forțele interne nu fac lucru mecanic) este (peste tot mai jos $\vec{v}_k \equiv \vec{v}_{\text{rot},k} = \vec{\omega} \times \vec{r}_k = \vec{r}_k \times \vec{\omega}$):

$$\begin{aligned} dW_{\text{rot}} &= \sum \vec{F}_k \cdot d\vec{r}_k = \sum \vec{F}_k \cdot \vec{v}_k \, dt = \sum \vec{F}_k \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_k) \, dt = \\ &= \sum \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_k \times \vec{F}_k) \, dt = \vec{M} \cdot \vec{\omega} \, dt, \end{aligned} \quad (6.13)$$

unde \vec{M} este momentul rezultat al forțelor față de un pol de pe axa de rotație și unde am folosit proprietatea de simetrie ciclică a produsului vectorial mixt (5.11).

Puterea dezvoltată de forțele aplicate va fi deci

$$P_{\text{rot}} = \dot{W}_{\text{rot}} = \vec{M} \cdot \vec{\omega}, \quad (6.14)$$

analog puterii la translație $\vec{F} \cdot \vec{v}$. Forței de la mișcarea de translație îi corespunde *momentul forței* la mișcarea de rotație.

Într-un SR *inerțial* putem scrie teorema energiei cinetice:

$$dE_{\text{rot}} = d\left(\frac{1}{2} I \omega^2\right) = dW_{\text{rot}} = \vec{M} \cdot \vec{\omega} \, dt, \quad \dot{E}_{\text{rot}} = P_{\text{rot}} = \vec{M} \cdot \vec{\omega}, \quad (6.15)$$

$$W_{\text{rot}} = \int \vec{M} \cdot \vec{\omega} \, dt = \Delta E_{\text{rot}} = \Delta \left(\frac{1}{2} I \omega^2 \right), \quad (6.16)$$

ceea ce se obține și direct prin derivarea energiei cinetice:

$$\dot{E}_{\text{rot}} = \left(\frac{1}{2} \sum m_k \dot{v}_k^2 \right) = \sum m_k \dot{\vec{v}}_k \cdot \vec{v}_k = \sum (\vec{F}_k + \vec{\mathcal{F}}_k) \cdot \vec{v}_k =$$

$$\sum \vec{F}_k (\vec{\omega} \times \vec{r}_k) = \sum \vec{\omega} (\vec{r}_k \times \vec{F}_k) = \vec{M} \cdot \vec{\omega}.$$

6.4. MOMENTELE DE INERȚIE FAȚĂ DE UN SISTEM DE COORDONATE

Momentul de inerție al unui corp depinde de axa față de care se calculează, de aceea nu este o mărime scalară (descrisă de o singură funcție) și nici vectorială (descrisă față de un SC prin trei funcții), ci una mai complexă (tensorială).

În adevăr, să deducem expresia analitică a energiei cinetice de rotație față de un SC cu originea pe axa de rotație (fig. 6.1; omitem accentele pentru simplificare):

$$E_{\text{rot}} = \sum_k \frac{1}{2} m_k \dot{v}_{\text{rot}k}^2 = \sum_k \frac{1}{2} m_k (\vec{\omega} \times \vec{r}_k)^2$$

sau

$$E_{\text{rot}} = \int \frac{1}{2} \dot{v}_{\text{rot}}^2 dm = \int \frac{1}{2} (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 dm;$$

$$\begin{aligned} E_{\text{rot}} &= \sum \frac{1}{2} m_k [\vec{\omega} \cdot \vec{r}_k + \vec{\omega} \cdot \vec{r}_k + \vec{\omega} \cdot \vec{r}_k + \vec{\omega} \cdot \vec{r}_k]^2 = \\ &= \sum \frac{1}{2} m_k [(\omega_x x_k - \omega_y y_k)^2 + (\omega_x x_k - \omega_y y_k)^2 + (\omega_x y_k - \omega_y x_k)^2]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} I_{xx} \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_{yy} \omega_y^2 + \frac{1}{2} I_{zz} \omega_z^2 + \\ &+ I_{xy} \omega_x \omega_y + I_{yz} \omega_y \omega_z + I_{zx} \omega_z \omega_x, \end{aligned} \quad (6.17)$$

unde

$$I_{xx} = \sum m_k (y_k^2 + z_k^2), \quad I_{yy} = \sum m_k (x_k^2 + z_k^2), \quad I_{zz} = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2) \quad (6.18)$$

se numesc *momente de inerție* față de axele de coordonate, iar

$$\begin{aligned} I_{xy} &= I_{yx} = - \sum m_k x_k y_k, \quad I_{yz} = I_{zy} = - \sum m_k y_k z_k, \\ I_{zx} &= I_{xz} = - \sum m_k z_k x_k \end{aligned} \quad (6.18)$$

se numesc *momente centrifugale* (sau de deviație).

Momentele de inerție (6.18) sînt chiar momentele de inerție față de axele de coordonate în sensul în care am definit mai înainte, prin (6.5), momentul de inerție față de o axă ($y_k^2 + z_k^2$ este pătratul distanței particulei m_k pînă la axa Ox ; $x_k^2 + z_k^2$ — pătratul distanței pînă la axa Oy etc.).

În cazul distribuției continue a masei momentele de inerție sînt

$$I_{xx} \stackrel{\text{def}}{=} \int (y^2 + z^2) dm = \int (y^2 + z^2) \rho dV \quad \text{etc.} \quad (6.19)$$

$$I_{xy} = I_{yx} \stackrel{\text{def}}{=} - \int xy dm = - \int xy \rho dV \quad \text{etc.}$$

Prin urmare, *energia cinetică de rotație este o formă pătratică în componentele vitezei unghiulare, ale cărei coeficienți sînt momentele de inerție.*

Momentele de inerție sînt descrise deci într-un SC prin 6 funcții și se reprezintă prin matricea *simetrică* (tensor de ordinul doi simetric):

$$\hat{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}; \quad I_{xy} = I_{yx}, \dots \quad (6.20)$$

unde elementele diagonale sînt momentele de inerție față de axele de coordonate, iar elementele nediagonale sînt momentele de inerție centrifugale. A nu se confunda *matricea* momentelor de inerție \hat{I} cu momentul de inerție față de o axă I .

6.5. MOMENTUL CINETIC DE ROTAȚIE

a) Față de un pol de pe axa de rotație a rigidului, ales drept *originea* a sistemului de coordonate (fig. 6.1), avem

$$\vec{J}_{\text{rot}} = \sum \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k = \sum \vec{r}_k \times m_k (\vec{\omega} \times \vec{r}_k) \quad (6.21)$$

sau

$$\begin{aligned} \vec{J}_{\text{rot}} &= \int \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm = \int dm \vec{r} [y(\omega_x y - \omega_y x) - z(\omega_x x - \omega_y z)] + \\ &+ \dots = \vec{I} \vec{\omega} + \dots \end{aligned} \quad (6.21')$$

cu componentele

$$\begin{aligned} J_x &= I_{xx} \omega_x + I_{xy} \omega_y + I_{xz} \omega_z, \quad J_y = I_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y + I_{yz} \omega_z, \\ J_z &= I_{zx} \omega_x + I_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z, \end{aligned} \quad (6.22)$$

care sînt *forme liniare* în componentele vitezei unghiulare.

De aici se vede că în general componentele momentului cinetic \vec{J} nu sînt proporționale cu componentele corespunzătoare ale lui $\vec{\omega}$, adică *vectorul \vec{J} nu este în general paralel cu vectorul $\vec{\omega}$, deci momentul cinetic \vec{J} nu este în general paralel cu axa de rotație ($\vec{\omega}$)*.

Dacă reprezentăm vectorii \vec{J} , $\vec{\omega}$ prin matrici coloane, putem scrie:

$$\begin{bmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

sau

$$\vec{J} = \hat{I}\vec{\omega} \equiv \int \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm. \quad (6.23)$$

Într-un SR inerțial putem scrie teorema momentului cinetic:

$$\dot{\vec{J}}_{\text{rot}} = \frac{d}{dt}(\hat{I}\vec{\omega}) = \vec{M}, \quad \int \vec{M} dt = \Delta(\hat{I}\vec{\omega}), \quad (6.24)$$

ceea ce se obține și direct prin derivarea momentului cinetic:

$$\dot{\vec{J}}_{\text{rot}} = (\sum \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k)' = \sum \vec{r}_k \times m_k \vec{a}_k = \sum \vec{r}_k \times (\vec{F}_k + \vec{\mathcal{F}}_k) = \sum \vec{r}_k \times \vec{F}_k = \vec{M}.$$

b) Produsul scalar $\vec{a} \cdot \vec{b}$ a doi vectori se poate scrie ca produs dintre matricea *linie* a primului vector și matricea *coloană* a celui de-al doilea vector:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = [a_x \ a_y \ a_z] \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = (\vec{a}, \vec{b}). \quad (6.52)$$

O expresie (\vec{a}, \vec{Mb}) înseamnă o *formă biliniară* în vectorii \vec{a} , \vec{b} și anume produsul scalar dintre vectorul \vec{a} și vectorul \vec{Mb} (care rezultă din înmulțirea matricei pătrate \hat{M} cu vectorul-coloană \vec{b}) sau altfel, este produsul dintre matricea *linie* a vectorului \vec{a} și matricea coloană care rezultă din înmulțirea matricei \hat{M} cu matricea coloană a vectorului \vec{b} :

$$\begin{aligned} (\vec{a}, \hat{M}\vec{b}) &= [a_x \ a_y \ a_z] \begin{bmatrix} M_{xx} & M_{xy} & M_{xz} \\ M_{yx} & M_{yy} & M_{yz} \\ M_{zx} & M_{zy} & M_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = [a_x \ a_y \ a_z] \begin{bmatrix} M_{xx}b_x + M_{xy}b_y + M_{xz}b_z \\ M_{yx}b_x + M_{yy}b_y + M_{yz}b_z \\ M_{zx}b_x + M_{zy}b_y + M_{zz}b_z \end{bmatrix} = \\ &= M_{xx}a_x b_x + M_{xy}a_x b_y + M_{xz}a_x b_z + M_{yx}a_y b_x + M_{yy}a_y b_y + M_{yz}a_y b_z + \\ &\quad + M_{zx}a_z b_x + M_{zy}a_z b_y + M_{zz}a_z b_z. \end{aligned} \quad (6.26)$$

În particular $(\vec{a}, \hat{M}\vec{a})$ este o *formă pătratică* în componentele vectorului \vec{a} :

$$\begin{aligned} (\vec{a}, \hat{M}\vec{a}) &= M_{xx}a_x^2 + M_{yy}a_y^2 + M_{zz}a_z^2 + (M_{xy} + M_{yx})a_x a_y + \\ &\quad + (M_{yz} + M_{zy})a_y a_z + (M_{zx} + M_{xz})a_z a_x. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Dacă matricea \hat{M} este simetrică, forma pătratică devine:

$$(\vec{a}, \hat{M}\vec{a}) = M_{xx}a_x^2 + M_{yy}a_y^2 + M_{zz}a_z^2 + 2M_{xy}a_x a_y + 2M_{yz}a_y a_z + 2M_{zx}a_z a_x. \quad (6.27')$$

În sfîrșit, se poate verifica ușor pentru vectori și matrici cu componente numere reale:

$$(\vec{a}, \hat{M}\vec{b}) = (\vec{b}, \hat{M}\vec{a}), \quad (6.28)$$

unde \hat{M} este matricea transpusă. Dacă matricea \hat{M} este simetrică, adică $\hat{M} = \hat{M}^T$, vom avea

$$(\vec{a}, \hat{M}\vec{b}) = (\vec{b}, \hat{M}\vec{a}), \quad \text{dacă } \hat{M} = \hat{M}^T. \quad (6.29)$$

c) Energia cinetică de rotație (6.17) se scrie acum cu ajutorul matricei momentelor de inerție \hat{I} (6.21) ca formă pătratică

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} (\vec{\omega}, \hat{I}\vec{\omega}) = \frac{1}{2} \int (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 dm \quad (6.30)$$

și ținînd seama de expresia momentului cinetic (6.23), putem scrie:

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} (\vec{\omega}, \hat{I}\vec{\omega}) = \frac{1}{2} (\vec{\omega}, \vec{J}) = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{J} = \frac{1}{2} I \omega^2, \quad (6.31)$$

analog energiei cinetice de translație

$$E_{\text{tr}} = \frac{1}{2} \vec{v} m \vec{v} = \frac{1}{2} \vec{p} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} m v^2, \quad (6.32)$$

numai că \vec{J} nu este în general paralel cu $\vec{\omega}$.

Deoarece $E_{\text{rot}} > 0$, rezultă $\cos \alpha > 0$, $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$, adică \vec{J} formează totdeauna un unghi ascuțit cu vectorul $\vec{\omega}$.
Notînd cu \vec{n} versorul axei

$$\vec{n} = (\cos \alpha_x, \cos \alpha_y, \cos \alpha_z) = \vec{\omega} / \omega, \quad (6.33)$$

putem exprima momentul de inerție I față de axă prin matricea momentelor de inerție \hat{I} , ca formă pătratică în cosinusurile directe (A. L. Cauchy 1827):

$$I = (\vec{n}, \hat{I}\vec{n}) = I_{xx} \cos^2 \alpha_x + \dots + 2I_{xy} \cos \alpha_x \cos \alpha_y + \dots, \quad (6.34)$$

expresie care rezultă ușor din (6.31) punînd $\vec{\omega} = \vec{n}\omega$.

d) Proiecția momentului cinetic \vec{J} pe axa de rotație (momentul cinetic în raport cu axa) se poate găsi imediat prin compararea expresiilor energiei cinetice:

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \vec{J} \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} J \omega \cos(\vec{J}, \vec{\omega}) = \frac{1}{2} J \omega, \quad \text{dar } E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2,$$

de unde (fig. 6.3):

$$J_{\parallel} = I \omega, \quad \vec{J}_{\parallel} = I \vec{\omega}, \quad (6.35)$$

deci $I\vec{\omega}$ ne dă numai componenta longitudinală a momentului cinetic, paralelă cu axa de rotație (momentul cinetic în raport cu axa de rotație). Expresia lui $J_{||}$ se poate obține și direct. Avem din fig. 6.1:

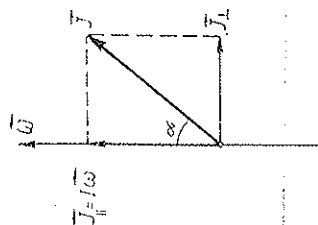


Fig. 6.3

$$\vec{J}_{rot} = \sum \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k = \sum (\vec{OC}_k + \vec{R}_k) \times m_k \vec{v}_k,$$

cum $\vec{v}_k = \vec{\omega} \times \vec{r}_k = \vec{\omega} \times \vec{R}_k$ este transversal, componenta longitudinală este dată de termenul al doilea:

$$\begin{aligned} \vec{J}_{||} &= \sum \vec{R}_k \times m_k \vec{v}_k = \sum \vec{R}_k \times m_k (\vec{\omega} \times \vec{R}_k) = \\ &= \sum m_k R_k^2 \vec{\omega} = I \vec{\omega}, \end{aligned}$$

unde am dezvoltat dublul produs vectorial după (5.12) și $\omega \vec{R}_k = 0$.

6.6. VARIATIA MOMENTULUI CINETIC DE ROTAȚIE ȘI VARIATIA ENERGIEI CINETICE DE ROTAȚIE

a) Derivata momentului cinetic de rotație se poate calcula direct din sumele respective (reamintim că $\vec{r}_k = \vec{\omega} \times \vec{r}_k = \vec{v}_{rot,k} = \vec{v}_k$):

$$\begin{aligned} \dot{\vec{J}}_{rot} &= \sum (\dot{\vec{r}}_k \times m_k \vec{v}_k)' = \sum \dot{\vec{r}}_k \times m_k \dot{\vec{v}}_k = \sum \dot{\vec{r}}_k \times m_k (\vec{\omega} \times \vec{r}_k)' = \\ &= \sum \dot{\vec{r}}_k \times m_k (\vec{\omega} \times \vec{r}_k) + \sum \dot{\vec{r}}_k \times m_k (\vec{\omega} \times \vec{v}_k). \end{aligned}$$

Primul termen este identic ca structură cu forma pătratică a lui \vec{J}_{rot} (6.21) numai că în loc de $\vec{\omega}$, avem aici $\dot{\vec{\omega}}$, deci este egal cu $\dot{\vec{I}}\vec{\omega}$. Al doilea termen, dezvoltat, dă $-\sum \vec{v}_k (\vec{r}_k m_k \vec{\omega})$, ($\vec{r}_k \vec{v}_k = 0$), la fel ca și $\vec{\omega} \times \vec{J}$:

$$\vec{\omega} \times \vec{J} = \vec{\omega} \times (\sum \vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k) = -\sum m_k \vec{v}_k (\vec{\omega} \vec{r}_k), \quad (\vec{\omega} \vec{v}_k = 0).$$

Prin urmare,

$$\dot{\vec{J}}_{rot} = \dot{\vec{I}}\vec{\omega} + \vec{\omega} \times \vec{J} = \dot{\vec{I}}\vec{\omega} + \vec{\omega} \times (I\vec{\omega}). \quad (6.36)$$

b) Derivata energiei cinetice de rotație:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{rot} &= \left(\sum \frac{1}{2} m_k v_k^2 \right)' = \sum m_k \vec{v}_k \dot{\vec{v}}_k = \sum m_k \vec{v}_k (\vec{\omega} \times \vec{r}_k)' = \\ &= \sum m_k \vec{v}_k (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_k), \quad (\text{termenul } \vec{v}_k (\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_k) = 0) \end{aligned}$$

și permutând ciclic produsul mixt:

$$\dot{E}_{rot} = \sum \vec{\varepsilon} (\vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k) = \vec{\varepsilon} \dot{\vec{J}} = (\vec{\varepsilon}, \dot{I}\vec{\omega}), \quad = (\vec{\omega}, \dot{\vec{I}}\vec{\varepsilon}),$$

(\vec{I} este matrice simetrică), dar din (6.36): $\dot{\vec{I}}\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{J}} - \vec{\omega} \times \vec{J}$, atunci

$$\dot{\vec{E}}_{rot} = (\vec{\omega}, \dot{\vec{J}} - \vec{\omega} \times \vec{J}) = (\vec{\omega}, \dot{\vec{J}}) - (\vec{\omega}, \vec{\omega} \times \vec{J}) = \vec{\omega} \dot{\vec{J}},$$

unde ultimul produs scalar (mixt) este nul. Prin urmare,

$$\dot{E}_{rot} = (\vec{\varepsilon}, I\vec{\omega}) = (\vec{\omega}, \dot{\vec{I}}\vec{\varepsilon}) = \vec{J} \dot{\vec{\varepsilon}} = \dot{\vec{J}} \vec{\omega}. \quad (6.37)$$

Într-un SR inerțial avem teoremele (6.24) și (6.15), deci

$$\dot{\vec{J}}_{rot} = \dot{\vec{I}}\vec{\varepsilon} + \vec{\omega} \times \vec{J} = \vec{M},$$

$$\dot{E}_{rot} = \vec{J}\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{J}}\vec{\omega} = \vec{M}\vec{\omega}. \quad (6.38)$$

6.7. TEOREMELE DE DESCOMPUNERE

Dacă descompunem mișcarea rigidului în mișcarea de translație a centrului de masă și mișcarea de rotație în jurul unei axe instantanee trecând prin centrul de masă, atunci se aplică teoremele de descompunere din cap. 4:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} = \vec{r}_{cm} \times \vec{P} + I_0 \vec{\omega}, \quad (6.39)$$

$$\text{unde} \quad \vec{L} = \vec{r}_{cm} \times m \vec{v}_{cm} = \vec{r}_{cm} \times \vec{P} \text{ și } \vec{S} = I_0 \vec{\omega}, \quad (6.40)$$

$$E_c = E_{tr} + E_{rot} = \frac{1}{2} m \vec{v}_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2, \quad (6.41)$$

$$\text{unde} \quad E_{tr} = \frac{1}{2} m \vec{v}_{cm}^2 \text{ și } E_{rot} = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 = \frac{1}{2} (\vec{\omega}, I_0 \vec{\omega}) = \frac{1}{2} \vec{\omega} \vec{S}; \quad (6.42)$$

unde I_0 este momentul de inerție față de axa de rotație centrală (care trece prin CM), iar I_0 este matricea momentelor de inerție față de SCM. Dacă descompunerea s-ar face față de un punct (pol) diferit de CM, atunci în descompunere ar apărea termeni suplimentari „mişti”, de „interferență” între mișcarea de translație și mișcarea de rotație.

Teoremele generale de la cap. 4 devin:

Teorema momentului cinetic:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} = \vec{M} = \sum \vec{r}_s \times \vec{F}_s = \vec{r}_{cm} \times \vec{F} + \sum \vec{r}_s' \times \vec{F}_s, \quad (6.43)$$

$$\dot{\vec{L}} = (\vec{r}_{cm} \times m \vec{v}_{cm})' = \vec{r}_{cm} \times \vec{F}, \quad (6.44)$$

$$\dot{\vec{S}} = (I_0 \vec{\omega})' = \dot{I}_0 \vec{\varepsilon} + \vec{\omega} \times \vec{S} = \vec{M}_0 = \sum \vec{r}_s' \times \vec{F}_s. \quad (6.45)$$

Teorema energiei cinetice :

$$\dot{E}_c = \dot{E}_{tr} + \dot{E}_{rot} = P = \sum \vec{F}_k \vec{v}_k = \vec{F} \vec{v}_{cm} + \sum \vec{F}_k \vec{v}_k' \quad (6.46)$$

$$\dot{E}_{tr} = \left(\frac{1}{2} m v_{cm}^2 \right)' = P_{tr} = \vec{F} \vec{v}_{cm}, \quad (6.47)$$

$$\dot{E}_{rot} = \left(\frac{1}{2} I_0 \omega^2 \right)' = \vec{S} \vec{\varepsilon} = \dot{S} \vec{\omega} = P_{rot} = \sum \vec{F}_k \vec{v}_k' = \vec{M}_0 \vec{\omega}. \quad (6.48)$$

Forța rezultantă :

$$\vec{F} = m \vec{a}_{cm}. \quad (6.49)$$

6.3. AXELE PRINCIPALE DE INERTIE

Se poate demonstra că rotind convenabil SC din fig. 6.1, există o poziție pentru care *momentele centrifugale se anulează*. Axele obținute se numesc *axe principale de inerție* Ox_1, Ox_2, Ox_3 , iar momentele de inerție respective se numesc *momente principale de inerție* $I_{1,2,3}$ (J. A. Segner 1755, L. Euler 1758). Față de aceste axe (notate cu indicii 1, 2, 3) avem deci

$$E_{rot} = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 = \frac{1}{2} (I_1 \cos^2 \alpha_1 + I_2 \cos^2 \alpha_2 + I_3 \cos^2 \alpha_3) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2, \quad (6.50)$$

$$I = I_1 \cos^2 \alpha_1 + I_2 \cos^2 \alpha_2 + I_3 \cos^2 \alpha_3, \quad (6.51)$$

unde $\alpha_{1,2,3}$ sînt unghiurile pe care le face axa de rotație $\vec{\omega}$ cu axele *principale de inerție* (fig. 6.4). Trecerea la noul SC înseamnă aducerea formei pătratice (6.17) (deci și a matricei \hat{I}) la forma diagonală (6.50), adică la o sumă de pătrate.

Condiția ca o axă, de exemplu, axa Ox_1 , să fie *principală* este ca cele două momente centrifugale referitoare la acea axă să fie nule:

$$I_{zx} = - \int z x dm = 0, \quad I_{yz} = - \int y z dm = 0.$$

Condiția ca cele trei axe Ox_1, Ox_2, Ox_3 ale unui SC ortogonal să fie principale este ca cele trei momente centrifugale de inerție să fie nule.

Față de axele principale cinetice de rotație apare atunci ca o sumă a energiilor cinetice de rotație, în mod independent, în jurul fiecărei axe principale, cu viteza unghiulară corespunzătoare (componenta lui $\vec{\omega}$ pe axa respectivă).

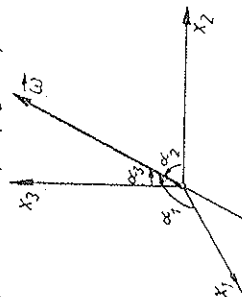


Fig. 6.4

Momentul cinetic devine

$$\vec{J}_{rot} = \vec{I} \vec{\omega}_1 + \vec{J} I_2 \omega_2 + \vec{K} I_3 \omega_3 = I_1 \vec{\omega}_1 + I_2 \vec{\omega}_2 + I_3 \vec{\omega}_3, \quad (6.52)$$

ca și cum rigidul s-ar roti în mod independent în jurul fiecărei axe cu viteza unghiulară respectivă.

Dacă rigidul se rotește în jurul unei axe *principale* de inerție, de exemplu, Ox_3 , atunci momentul cinetic este *paralel* cu axa de rotație:

$$\vec{J} = I_3 \vec{\omega}, \quad \text{dacă } \omega = \omega_3, \quad \omega_1 = \omega_2 = 0. \quad (6.53)$$

În general însă, vectorul \vec{J} nu este paralel cu axa de rotație $\vec{\omega}$.

Un corp pentru care $I_1 = I_2 = I_3 = I$ se numește *tălăv* (sferică) *sferic* (ă). atunci momentul de inerție (6.51) este același pentru orice axă care trece prin centrul respectiv (deoarece $\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1$) și (6.52) devine:

$$\vec{J} = I \vec{\omega}, \quad \vec{J} \parallel \vec{\omega}, \quad (I_1 = I_2 = I_3). \quad (6.53')$$

adică \vec{J} este paralel cu $\vec{\omega}$ pentru orice axă de rotație care trece prin centrul respectiv.

Cînd axa trece prin centrul de masă al corpului, ea se numește axă *centrală* de inerție, iar momentul față de această axă se numește *moment central* de inerție.

O axă *principală centrală* este *principală pentru toate punctele sale*.

Pentru corpuri omogene regulate *momentele principale centrale* de inerție se pot calcula ușor și se găsesc în tabele.

Dacă un corp posedă o axă de simetrie, ea va fi axă *principală centrală de inerție* (la sferă omogenă orice diametru este principal).

În adevăr, dacă de exemplu, axa Oz este axă de simetrie, atunci pentru orice element de masă $dm(x, y, z)$ se va găsi un element identic așezat simetric $dm(-x, -y, z)$ (fig. 6.5) și în integralele $I_{zx} = - \int z x dm, I_{zy} = - \int z y dm$ termenii corespunzători se vor anula reciproc.

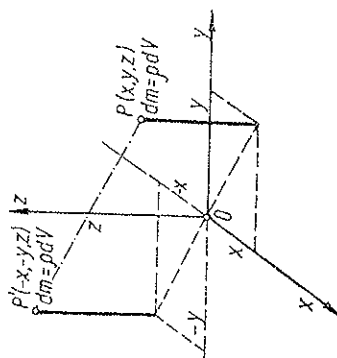


Fig. 6.5

6.9. TEOREMA LUI STEINER

Pentru o axă *centrală oarecare*, momentul de inerție se calculează cu formula (6.51), cunoscînd momentele principale centrale, iar pentru o axă necentrală („exterioră”) oarecare se aplică *teorema lui Steiner* (cunoscută de Huygens și demonstrată de Euler în 1749): *momentul de inerție I față de o axă oarecare este egal cu momentul de inerție I_0 față de o*

axă paralelă centrală plus produsul dintre masa corpului și pătratul distanței dintre axe:

$$I = I_0 + mR_0^2. \quad (6.54)$$

Teorema lui Steiner este analogă teoremelor de descompunere (6.39—42) față de CM:

Momentul de inerție I față de o axă oarecare este egal cu momentul de inerție orbital sau extern al corpului presupus redus la un punct material în CM (mR_0^2) plus momentul de inerție propriu sau intern I_0 față de o axă centrală, paralelă cu axa dată.

Pentru demonstrație alegem Oz de-a lungul axei date, iar $O'z'$ de-a lungul axei paralele centrale (fig. 6.6, axele Oz și $O'z'$ sînt perpendiculare pe planul figurii). Atunci

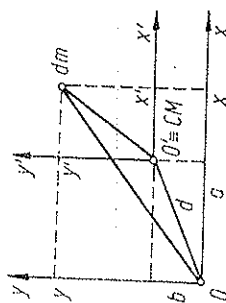


Fig. 6.6

$$I = \int (x^2 + y^2) dm = \int (a + x')^2 dm + \int (b + y')^2 dm = \\ = \int (x'^2 + y'^2) dm + \int (a^2 + b^2) dm + 2a \int x' dm + 2b \int y' dm = I_0 + mR_0^2,$$

ultimele două integrale fiind nule deoarece O' coincide cu CM, adică

$$x'_{cm} = \frac{1}{m} \int x' dm = 0, \quad y'_{cm} = \frac{1}{m} \int y' dm = 0.$$

Mai general, matricea momentelor de inerție în față de un SC oarecare este egală cu matricea momentelor de inerție orbitale \hat{I}_{cm} ale corpului presupus redus la un punct material în CM, plus matricea momentelor de inerție proprii \hat{I}_0 față de un SC central paralel cu cel dat:

$$\hat{I} = \hat{I}_{cm} + \hat{I}_0. \quad (6.55)$$

6.10. MOMENTELE DE INERȚIE. EXEMPLE DE CALCUL

a) Tijă subțire omogenă de masă m și lungime l (fig. 6.7):

$$I_1 = I_2 = \int_{-l/2}^{l/2} z^2 dm, \quad dm = \frac{m}{l} dz,$$

$$I_1 = I_2 = \frac{m}{l} \int_{-l/2}^{l/2} z^2 dz = \frac{1}{12} ml^2, \quad I_3 = 0. \quad (6.56)$$

În față de o axă la capătul barei (perpendiculară pe bară) găsim, aplicînd teorema lui Steiner:

$$I_1' = I_2' = \frac{1}{12} ml^2 + m \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} ml^2, \quad (I_3' = 0). \quad (6.57)$$

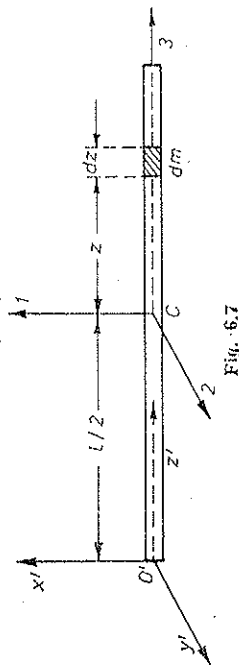


Fig. 6.7

b) Pentru o figură plană ($Ox_3 \perp$ pe planul figurii):

$$I_3 = I_1 + I_2, \quad (6.58)$$

deoarece (fig. 6.8):

$$I_1 = \int y^2 dm, \quad I_2 = \int x^2 dm, \quad I_3 = \int (x^2 + y^2) dm = I_1 + I_2.$$

De exemplu, pentru o coroană circulară omogenă de masă m și razele $R_{1,2}$ (fig. 6.9) avem $I_3 = I_1 + I_2$ și din motive de simetrie $I_1 = I_2$, deci

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{2} I_3, \quad I_3 = \int (x^2 + y^2) dm, \quad (6.59)$$

$dm = \sigma dS = \sigma \cdot 2\pi r dr$, (σ — densitatea superficială),

$$I_3 = \int_{R_1}^{R_2} r^2 \sigma 2\pi r dr = \frac{\pi \sigma}{2} (R_2^4 - R_1^4) = \frac{1}{2} m (R_2^2 + R_1^2). \quad (6.60)$$

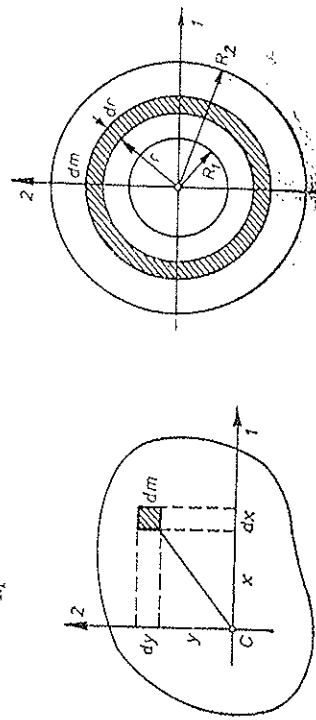


Fig. 6.8

Fig. 6.9

În particular, pentru un inel subțire omogen de masă m și rază R rezultă ($R_1 = R_2 = R$):

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{2} I_3, \quad I_3 = mR^2 \quad (6.61)$$

și pentru un disc subțire omogen de rază $R = R_2$, $R_1 = 0$:

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{2} I_3, \quad I_3 = \frac{1}{2} mR^2. \quad (6.62)$$

c) *Pătură sferică* omogenă de masă m și raze $R_{1,2}$:

$$\begin{aligned} I_1 = I_2 = I_3 &= \frac{1}{3} (I_1 + I_2 + I_3) = \frac{1}{3} \int (y^2 + z^2 + x^2 + y^2 + z^2) dm = \\ &= \frac{2}{3} \int r^2 dV = \frac{2}{3} \rho \int_{R_1}^{R_2} r^2 \cdot 4\pi r^2 dr = \frac{8\pi}{3} \rho \frac{1}{5} (R_2^5 - R_1^5) = \\ &= \frac{2}{5} m (R_2^5 - R_1^5) : (R_2^3 - R_1^3). \end{aligned} \quad (6.63)$$

În particular, pentru o *pătură sferică subțire* omogenă de masă m și rază $R = R_1 = R_2$:

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{3} m R^2 \quad (6.64)$$

și pentru o *sferă plină* omogenă ($R_2 = R$, $R_1 = 0$):

$$I_1 = I_2 = I_3 = \frac{2}{5} m R^2. \quad (6.65)$$

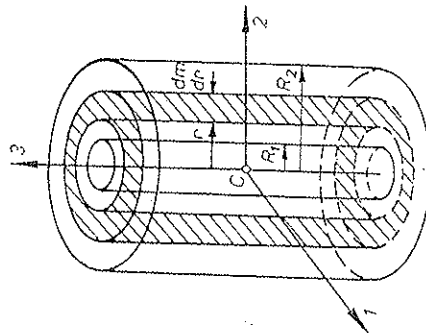


Fig. 6.10

d) *Pătură cilindrică* omogenă de masă m , raze $R_{1,2}$ și înălțime h (fig. 6.10):

$$\begin{aligned} I_3 &= \int r^2 dm = \int_{R_1}^{R_2} r^2 2\pi r dr \cdot h = \\ &= 2\pi \rho h \frac{1}{4} (R_2^4 - R_1^4) = \frac{1}{2} m (R_2^2 + R_1^2). \end{aligned} \quad (6.66)$$

$$\begin{aligned} I_1 = I_2 &= \frac{1}{2} (I_1 + I_2) = \frac{1}{2} \int (y^2 + z^2 + x^2 + z^2) dm = \frac{1}{2} \int r^2 dm + \int x^2 dm = \\ &= \frac{1}{2} I_3 + \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \frac{m}{h} dz = \frac{1}{4} m (R_1^2 + R_2^2 + \frac{1}{3} h^2). \end{aligned} \quad (6.67)$$

În particular, pentru o *pătură cilindrică subțire* de masă m , rază $R = R_1 = R_2$ și înălțime h rezultă:

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{2} m R^2 + \frac{1}{12} m h^2, \quad I_3 = m R^2 \quad (6.68)$$

și pentru un *cilindru plin* omogen de masă m , rază R și înălțime h ($R_1 = 0$, $R_2 = R$):

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{4} m (R^2 + \frac{1}{3} h^2), \quad I_3 = \frac{1}{2} m R^2. \quad (6.69)$$

6.11. rotația în jurul axei fixe. CONSERVAREA MOMENTULUI CINETIC

a) *Rotația în jurul axei fixe.* În cazul axei fixe avem $\omega_z = \omega$, ($\omega_x = \omega_y = 0$),

$$J_z = I_x \omega_x \text{ sau } J_{||} = I \omega. \quad (6.70)$$

Ecuatia momentului cinetic dă:

$$\dot{J} = \dot{M} \rightarrow \dot{J}_z = \dot{M}_z \text{ sau } \frac{d(I\omega)}{dt} = \dot{M}_z = \dot{M}_{||}, \quad (6.71)$$

unde $M_z = M_{||}$ este momentul forțelor în raport cu axa de rotație, adică proiecția pe Oz (axa de rotație) a momentului resultant \vec{M} (calculat în raport cu un punct de pe axă). Aceasta este *ecuația fundamentală pentru mișcarea de rotație*, analogă ecuației $\frac{d(mv)}{dt} = F_t$ pentru mișcarea de translație. Dacă $I = \text{const}$, avem

$$\frac{d(I\omega)}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = I\epsilon = \dot{M}_{||}, \quad (I = \text{const}). \quad (6.72)$$

Exemple. a) Pe un cilindru omogen de masă M și rază R este înfășurat un fir subțire. La capătul liber al firului este atârnat un corp de masă m_1 de care este legat în continuare printr-un alt fir un alt corp de masă m_2 . Se neglijează frecările. Să se afle accelerația corpurilor și tensiunile din fire (fig. 6.11).

$$\text{Rezoluție. } T_1 R = I\epsilon, \quad m_1 g + T_2 - T_1 = m_1 a, \quad m_2 g - T_2 = m_2 a, \quad I = \frac{1}{2} M R^2.$$

Condiția de necalcare a firului pe cilindru: $a = \epsilon R$.

Rezolvând sistemul, găsim:

$$a = \frac{g}{1 + M/2(m_1 + m_2)}, \quad T_1 = \frac{Mg}{2 + M/(m_1 + m_2)}, \quad T_2 = \frac{m_2 g}{1 + 2(m_1 + m_2)/M}.$$

b) Un cilindru omogen de rază R este adus în stare de rotație cu viteză ω_0 în jurul axei sale și așezat în unghiul drept ca în fig. 6.12. Cunoșcând coeficientul de frecare la alunecare μ , să se afle viteza la care se efectuează cilindrul până la oprire.

Rezoluție. $N_1 - mg + F_{f2} = 0$, $N_2 - F_{f1} = 0$, $I\epsilon = -(F_{f1} + F_{f2})R$ cu condițiile $F_{f1} = \mu_1 N_1$, $F_{f2} = \mu_2 N_2$. Rezolvând sistemul, găsim:

$$\epsilon = -\frac{\mu_1(1 + \mu_2)}{1 + \mu_1 \mu_2} \frac{m g R}{I}, \quad I = \frac{1}{2} m R^2$$

și atunci

$$N = -\frac{\mu_0^2}{2\epsilon} = \frac{1 + \mu_1 \mu_2}{\mu_1(1 + \mu_2)} \frac{m_0^2 R}{4g}.$$

c) Momentul forțelor de frecare dintr-un lagăr este proporțional cu viteza unghiulară: $M_f \sim \omega$. Știind că sub acțiunea unui moment motor (activ) $\dot{M} = 1,00 \text{ kN} \cdot \text{m}$, rotorul cu momentul de inerție $I = 20,0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, atinge viteză limită (maximă) $\omega_0 = 1200 \text{ rot/min}$, să se afle după cât timp rotorul atinge 99% din această viteză și câte rotații face în acest timp.

Rezultate. $I\dot{\omega} = M - M_f$ sau $I \frac{d\omega}{dt} = M - k\omega$. Cînd se atinge turația limită, $\dot{\omega} = 0$ sau $M = M_f = k\omega_0$, deci $k = M/\omega_0$.

$$\frac{I d\omega}{M - k\omega} = dt \text{ sau } \frac{I}{M} \frac{d\omega}{1 - \omega/\omega_0} = dt \text{ și } \frac{I}{M} \frac{\omega d\omega}{1 - \omega/\omega_0} = \omega dt = d\theta,$$

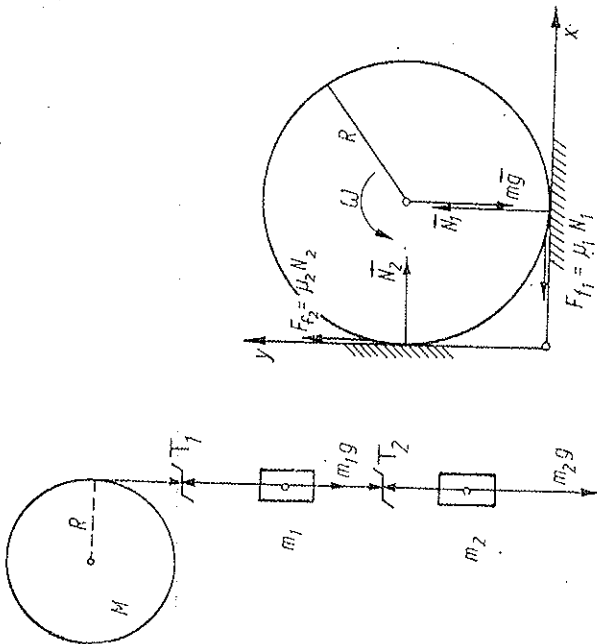


Fig. 6.11

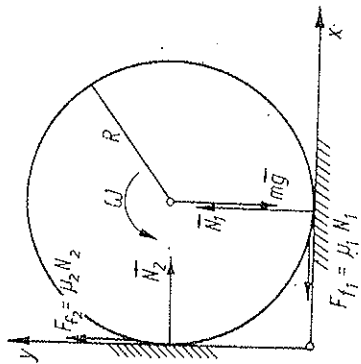


Fig. 6.12

de unde integrînd cele două ecuații (cu ω inițial nul):

$$t = \frac{I}{M} \omega_0 \ln \frac{1}{1 - \omega/\omega_0} = 11,5 \text{ s}; \quad \theta = 2\pi N = \frac{I}{M} \omega_0 \left(\omega_0 \ln \frac{1}{1 - \omega/\omega_0} - \omega \right) = \omega_0 \left(t - \frac{I}{M} \omega \right) = 180 \text{ rot.}$$

b) Conservarea momentului cinetic. Dacă $M_{||} = 0$, din (6.71) rezultă conservarea momentului cinetic în raport cu axa de rotație:

$$M_{||} = 0 \rightarrow J_{||} = I\omega = \text{const.} \quad (6.73)$$

Conservarea momentului cinetic $I\omega$ se demonstrează ușor cu ajutorul scaunului (tabureții) lui Jukovski — o platformă orizontală rotativă pe rulmenți. Un om așază greutatea în mâini se rotește împreună cu platforma. Depărțind lateral mâinile, crește I și deci scade ω . Invers, apropiind mâinile de corp, scade I și crește ω (fig. 6.13).

Într-o altă experiență, un om, inițial în repaus, ține în mînă o roată (Prandtl) cu axă verticală (fig. 6.13). Punînd-o în mișcare de rotație, platforma cu omul se va roti în sens invers, pentru că momentul cinetic total este nul.

Dacă omul, inițial în repaus, primește o roată în rotație cu axă verticală și apoi întoarce axa ei cu 180° , el se va roti în sens opus, și întorcînd roata înapoi cu 180° , el se va opri și poate restitui roata.

Ca ordin de mărime, momentul de inerție al unui om față de axa sa longitudinală (verticală) în pozițiile: drept — $1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; ghemuit — $2,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; pe un picior cu brațele depărtate și celălalt picior depărtat — $8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. În jurul axei centrale sagitale (stînd drept) — $17 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

c) Între mișcarea de translație și mișcarea de rotație există o analogie ilustrată de tabelul de mai jos.

Legile mișcării de rotație explică funcționarea volanților. Volantul este o roată (disc) cu moment de inerție mare, care posedă deci un moment cinetic mare și o energie cinetică de rotație

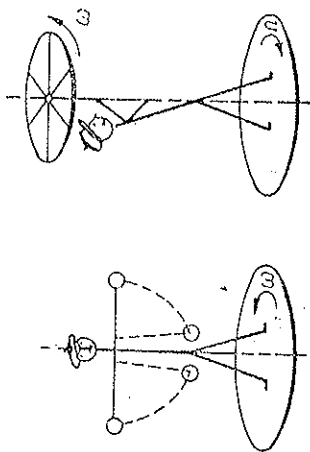


Fig. 6.13

Miscarea de translație	Miscarea de rotație
s , [m]	θ , [rad]
$v = \dot{s}$, [m/s]	$\omega = \dot{\theta}$, [rad/s]
\vec{v} , [m/s]	$\vec{\omega}$, [rad/s]
$a_t = \dot{v} = \ddot{s}$, [m/s ²]	$\epsilon_{ } = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$, [rad/s ²]
$\vec{a} = \ddot{\vec{v}}$, [m/s ²]	$\vec{\epsilon} = \ddot{\vec{\omega}}$, [rad/s ²]
m , [kg]	I , [kg · m ²]
\vec{F} , [N]	\vec{M} , [N · m]
$F_t = m a_t$	$M_{ } = I \epsilon_{ }$
$\vec{p} = m \vec{v}$, [kg · m/s]	$\vec{M}_{ } = I \vec{\omega}$, [J · s]
$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	$\vec{M} = \frac{d\vec{J}}{dt}$
$E_t = m a_t$	$M_{ } = I \epsilon_{ }$
$E_c = \frac{1}{2} m v^2$, [J]	$E_c = \frac{1}{2} I \omega^2$, [J]
$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$, [J]	$dW = \vec{M} \cdot d\vec{\theta}$, [J]
$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$, [W]	$P = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$, [W]

mare. Volantul servește pentru uniformizarea mișcării de rotație a mașinilor. În adevăr, la mașinile cu explozie forțele dezvoltate nu sînt constante și nu efectuează uniform lucru mecanic, de aceea mișcarea pistonului n-ar da o mișcare de rotație uniformă. Fixînd pe arborele motor un volant, acesta joacă rolul unui „rezervor” de energie cinetică care compensează variațiile lucrului mecanic produs de motor, astfel încît variațiile turației vor fi mici (fiind invers proporționale cu momentul de inerție al volantului). Rolul volantului poate fi îndeplinit și de rotoarele turbinelor sau ale motoarelor electrice.

6.12. PENDULUL DE TORSIUNE

Un fir (sau bară) elastic, vertical, răscut cu ajutorul unui cuplu de forțe și lăsat liber va efectua oscilații de *torsiune* (fig. 6.14). Pentru unghiuri mici de răsucire momentul forțelor elastice M este proporțional cu unghiul de răsucire θ (în radiani):

$$M = -C\theta, \quad (6.74)$$

unde C este *constanta de torsiune* a firului, avind dimensiunile:

$$[C] = [M] = L^2MT^{-2} = N \cdot m \text{ sau } N \cdot m/\text{rad în SI}. \quad (6.75)$$

Relația (6.74) este analogul unghiular al cazului liniar $F = -kx$. Semnul minus din (6.74) arată că momentul elastic M dezvoltat de firul răsucit este opus creșterii unghiului de răsucire θ . Ecuația (6.72) dă

$$I\ddot{\theta} = M = -C\theta, \quad I\ddot{\theta} + C\theta = 0, \quad (6.76)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{C}{I}\theta = 0 \text{ sau } \ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0,$$

adică cunoscuta ecuație a oscilatorului armonic, de unde perioada oscilațiilor de torsiune (a nu se confunda θ = viteza unghiulară cu ω de mai sus = frecvența unghiulară a oscilațiilor):

$$\omega = \sqrt{\frac{C}{I}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}}, \quad \left(\text{analog lui } T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\right). \quad (6.77)$$

Pendulul de torsiune este folosit, de exemplu, la determinarea experimentală a momentelor de inerție, a constantei gravitaționale universale etc.

6.13. PENDULUL FIZIC

Un corp rigid care poate oscila în jurul unei axe orizontale fixe de suspenzie, sub acțiunea gravitației sale, constituie un *pendul fizic* (fig. 6.15). Se neglijează forțele de frecare. Ecuația (6.72) dă (R_0 — distanța centrului de greutate G până la axa de suspenție O):

$$I\ddot{\theta} = M = -mgR_0 \sin\theta, \quad (6.78)$$

(momentul M este de semn opus unghiului θ). Pentru unghiuri mici ($\theta \ll 1$ rad sau $\theta < 6^\circ$), $\sin \theta \approx \theta$ în rad și (6.78) devine:

$$\ddot{\theta} + \frac{mgR_0}{I}\theta = 0, \quad \omega^2 = \frac{mgR_0}{I}, \quad (6.79)$$

de unde perioada oscilațiilor mici:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgR_0}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{g}}, \quad l_r = \frac{I}{mR_0}, \quad (6.80)$$

unde I este momentul de inerție față de axa de suspenție O , iar l_r — *lungimea redusă* a pendulului fizic, adică lungimea unui pendul simplu (matematic) sincron cu cel fizic.

Legea izocronismului micilor oscilații:
Oscilațiile mici sînt izocrone, adică perioada lor nu depinde de amplitudinea unghiulară.

Conform teoremei lui Steiner,

$$I = I_0 + mR_0^2, \quad (6.81),$$

de aceea

$$l_r = \frac{I_0 + mR_0^2}{mR_0} = R_0 + \frac{I_0}{mR_0} = R_0 + R'_0 > R_0, \quad (6.82)$$

$$R_0R'_0 = I_0/m.$$

Dacă schimbăm axa de suspenție din O în O' (fig. 6.15), perioada nu se schimbă (O' se numește *centrul de oscilație*):

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + mR_0'^2}{gmR'_0}} = 2\pi\sqrt{\frac{R_0 + R'_0}{g}} = T. \quad (6.83)$$

Pendulul *reversibil* (M. R. Prony 1792, H. Kater 1817) este un pendul pentru care stabilim experimental poziția axelor O, O' astfel ca perioadele să fie egale. Atunci distanța dintre aceste axe va fi lungimea redusă l_r și cu (6.80) putem calcula pe $g = 4\pi^2 l_r / T^2$ ($l_r = OO'$).

6.14. AXELE LIBERE (SPONTANE) ȘI AXELE PERMANENTE DE ROTAȚIE

6.14.1. AXELE LIBERE

Teoria arată și experiența confirmă că atunci cînd un corp este obligat să se rotească în jurul unei axe fixe diferite de o axă principală centrală de inerție, corpul reacționează asupra axei și lagărelor cu forțe de reacțiune care depind în general de pătratul vitezei unghiulare ω și de accelerația unghiulară $\varepsilon = \dot{\omega}$, putînd deforma sau chiar rupe axul la turații mari. Astfel, un disc fixat excentric sau înclinat îndoaie axul și apasă asupra lagărelor (fig. 6.16).

În adevăr, forța rezultantă, conform lui (5.26) (polul pe axa de rotație):

$$\vec{F} = m\vec{a}_{cm} = m\vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{cm} + m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{cm}) \quad (6.84)$$

va fi *nullă* dacă axa este *centrală*, adică CM se află pe axa de rotație, căci atunci $\vec{r}_{cm} \parallel \vec{\omega}$; altfel forța va depinde de pătratul vitezei unghiulare ω și de neuniformitatea rotației (de $\varepsilon = \dot{\omega}$). Alegând ca mai înainte axa Oz de-a lungul axei de rotație $\vec{\omega}$, expresia (6.84) devine analitic:

$$\vec{F} = m\vec{r}(-\varepsilon y_{cm} - \omega^2 x_{cm}) + m\vec{j}(\varepsilon x_{cm} - \omega^2 y_{cm}) \quad (6.85)$$

și dacă CM este pe axa de rotație ($x_{cm} = y_{cm} = 0$), forța se anulează.

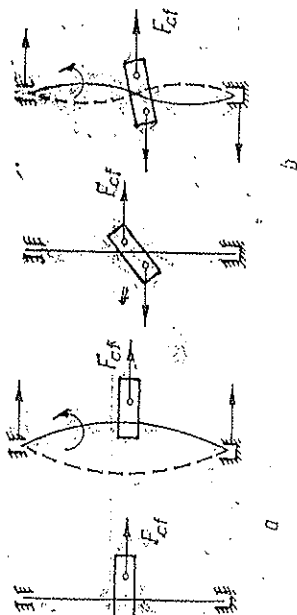


Fig. 6.16

La fel, momentul resultant, conform lui (6.38):

$$\vec{M} = \vec{J} = \vec{I}\vec{\varepsilon} + \vec{\omega} \times \vec{J} = \vec{I}\vec{\varepsilon} + \vec{\omega} \times (\vec{I}\vec{\omega}) \quad (6.86)$$

va fi *paralel* cu axa de rotație dacă aceasta este *principală*, căci atunci $\vec{\omega} \times \vec{J} = 0$ ($\vec{J} \parallel \vec{\omega}$) și $\vec{I}\vec{\varepsilon}$ se reduce la $I\varepsilon$, paralel cu $\vec{\omega}$; altfel, axa va fi supusă la un moment M_1 care îndoaie axa. Analitic, ecuația (6.86) devine:

$$\vec{M} = \vec{i}(I_{xx}\varepsilon - I_{yz}\omega^2) + \vec{j}(I_{yz}\varepsilon + I_{xx}\omega^2) + \vec{k}I_{zz}\varepsilon \quad (6.87)$$

și dacă Oz este axă *principală* (atunci $I_{yz} = I_{zy} = 0$), atunci componentele transversale ale momentului se anulează ($M_z = M_y = 0$) și \vec{M} va fi $\vec{I}\vec{\varepsilon}$, paralel cu axa de rotație (cu $\vec{\omega}$).

De aceea, pentru ca axa de rotație să nu fie supusă la eforturi, trebuie ca forțele de inerție centrifuge cu care corpul reacționează asupra axei să se echilibreze reciproc (să dea rezultatul nul și moment resultant paralel cu axa), ceea ce reprezintă tocmai condiția ca *axa de rotație să fie axă principală centrală de inerție* (fapt remarcat încă de Euler). Pentru acestea piesele în rotație (volanții, roțile, turbinele) trebuie bine centrate și echilibrate.

Dacă în experimentele din fig. 6.16 axa de rotație a corpului este o axă *principală centrală* de inerție, atunci lagărul superior poate fi *indepartat* și corpul se va roti *liber* în jurul axei sale verticale. În acest caz, forțele din lagărul inferior dau $M_1 = 0$ și deci $\vec{J} = \vec{I}\vec{\omega}$ păstrează direcție neschimbată.

Dacă *unui rigid nesupus la nici o forță exterioră i se imprimă o rotație în jurul unei axe principale centrale de inerție, el va continua la nesfârșit să se*

rotească uniform în jurul acestei axe (analogul unghiular al legii inerției privind translația CM, § 4.5).

În adevăr, dacă de exemplu, $\omega = \omega_3$, $\omega_{1,2} = 0$, atunci

$$\vec{S} = I_3\vec{\omega}, \quad \frac{d}{dt}(I_3\vec{\omega}) = \vec{M} \equiv 0 \rightarrow I_3\dot{\vec{\omega}} = \text{const}, \quad (6.88)$$

de unde $\vec{\omega} = \text{const}$.

Axele principale centrale de inerție se mai numesc de aceea și *axe libere* (*spondane*) de rotație.

6.14.2. STABILITATEA ROTAȚIEI

Rotația este *stabilă* în jurul axei libere de moment de inerție *extremă* (maxim sau minim) și este instabilă în jurul axei libere de moment de inerție intermediar. Astfel, dacă rotim printr-un fir o bară ușoară suspendată (fig. 6.17), forțele centrifuge F_{cf} vor stabili până la urmă o rotație stabilă în jurul axei transversale. Tot astfel se întâmplă cu un disc (sau inel) de carton sau cu un lănișor ușor (cu capetele legate între ele). Dacă încercăm să perturbăm mișcarea, corpul revine la rotația sa stabilă.

Experimente și mai simple se fac cu o farfurioară sau cu o monedă. Ele se pot roti liber și stabil pe o masă în jurul unui diametru vertical. Dacă însă farfurioara este ovală sau monedă teșită la forma ovală, putem să le imprimăm o rotație liberă *stabilă* în jurul diametrului *lung*, dar nu în jurul celui scurt, deși momentul de inerție în jurul diametrului scurt este mai mare decât în jurul celui lung (dar mai mic decât în jurul axei perpendiculare pe planul dis-

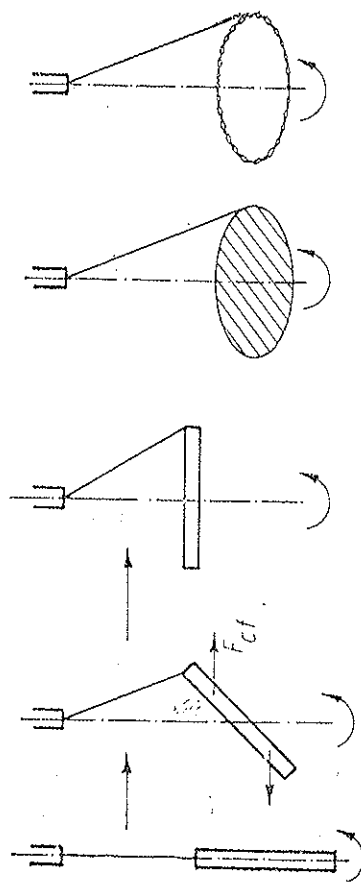


Fig. 6.17

cului). Farfurioara ovală sau monedă ovală în cel mai bun caz se va ridica și se va roti în jurul diametrului lung.

În sfârșit, putem arunca în aer o cutie paralelipipedică (de țigări, de chibrituri etc.) imprimându-i o rotație liberă stabilă în jurul unei axe perpendiculare pe fața de arie maximă sau minimă, nu însă de arie intermediară (momentul de inerție respectiv va fi maxim, minim sau intermediar).

6.14.3. LEGEA INERȚIEI

Dacă un rigid este izolat ($\vec{F} = 0$, $\vec{M} = 0$), atunci momentul său cinetic \vec{J} și energia sa cinetică E_c se conservă. Cum în acest caz CM se mișcă rectiliniu uniform ($\vec{F} = 0$), rezultă că momentul cinetic orbital se conservă: $\vec{L} = \vec{r}_{cm} \times m\vec{v}_{cm} = \text{const}$ și energia cinetică de translație se conservă: $E_t = \frac{1}{2} m\vec{v}_{cm}^2 = \text{const}$. Atunci și **momentul cinetic propriu \vec{S} se conservă**, deoarece $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, și **energia cinetică proprie de rotație se conservă** $E_{rot} = \frac{1}{2} \vec{S} \cdot \vec{\omega}$, deoarece $E_c = E_t + E_{rot}$. Din conservarea lui \vec{S} nu rezultă în general conservarea vectorului $\vec{\omega}$, deoarece \vec{S} nu este în general paralel cu $\vec{\omega}$. Conservarea rotației uniforme are totdeauna loc pentru tîrtezuł sferic (6.53):

$$I_1 = I_2 = I_3 = I, \quad \vec{S} = I\vec{\omega} = \text{const} \rightarrow \vec{\omega} = \text{const}, \quad (6.89)$$

precum și în cazurile (6.53, 6.88). În general însă, vectorul $\vec{\omega}$ se schimbă față de $\vec{S} = \text{const}$, dar astfel încît

$$E_{rot} = \frac{1}{2} \vec{S} \cdot \vec{\omega} = \text{const}, \quad (\vec{S} = \text{const}). \quad (6.90)$$

Dacă un rigid este izolat, atunci centrul său de masă (CM) este în repaus sau în mișcare rectilinie uniformă, și în același timp rigidul se poate roti la nesfîrșit uniform în jurul unei axe principale centrale de inerție.

6.14.4. AXE PERMANENTE

În sfîrșit, se poate arăta că, dacă unui corp mobil în jurul unui punct fix și supus la forțe externe trecînd prin acel punct, i se imprimă o mișcare de rotație în jurul unei axe **principale** de inerție trecînd prin acel punct fix, el va continua să se rotească uniform în jurul acestei axe. De aceea axele principale de inerție se mai numesc și axe **permanente** de rotație. După cum am văzut, axele permanente de rotație trecînd prin **centrul de masă** se numesc axe **libere** de rotație.

6.15. GIROSCOPUL

Giroscoful este un corp care efectuează o mișcare de rotație (cu tîrtezuł mare) în jurul unei axe de simetrie libere (principale centrale), de moment de inerție maxim. El tinde să păstreze neschimbată în spațiu direcția axei sale de rotație și este cu atît mai stabil cu cît viteza unghiulară este mai mare și cu cît momentul de inerție față de axa de rotație este mai mare. Giroscoful a fost inventat de Foucault în 1852 (cu scopul de a dovedi rotația Pămîntului).

6.15.1. TEORIA ELEMENTARĂ

Giroscoful în suspensie **cardanică** își păstrează axa neschimbată în spațiu oricum am roti suportul (fig. 6.18). În adevăr, nefînd supus la nici un **moment** al forțelor exterioare, datorită suspensiei cardanice, momentul cinetic al giroscofului se conservă:

$$\vec{S} = I\vec{\omega} = \text{const} \rightarrow \vec{\omega} = \text{const}. \quad (6.91)$$

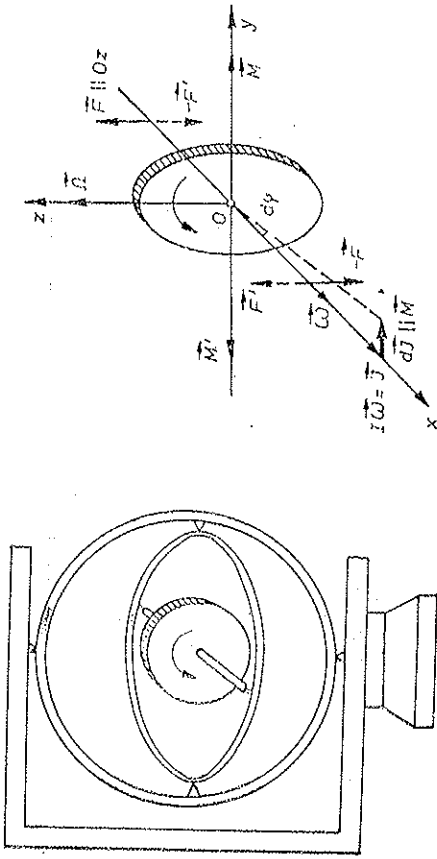


Fig. 6.13

Fig. 6.19

Dacă aplicăm giroscofului un moment \vec{M} perpendicular pe axa sa de rotație, el se va roti în jurul celei de-a **treia** axe (fig. 6.19).

În adevăr (considerăm CM în repaus în originea SL, atunci SCM coincide cu SL):

$$\dot{\vec{J}} = \frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{M}, \quad d\vec{J} = \vec{M} dt \quad (6.92)$$

și considerînd că \vec{J} rămîne practic egal cu $I\vec{\omega}$, rezultă că axa de rotație $\vec{\omega}$ (inițial paralelă cu Ox) se va roti în jurul lui Oz , momentul \vec{M} fiind după Oy . De aici rezultă regula:

Giroscoful tinde să așeze axa sa de rotație $\vec{\omega}$ paralel cu axa rotației forțate (impulse) \vec{M} .

Notînd cu Ω viteza unghiulară în jurul axei Oz , avem (considerînd că $\Omega \ll \omega$), astfel ca $\vec{J} \approx I\vec{\omega}$:

$$d\varphi = \Omega dt, \quad dJ = J d\varphi = \Omega J dt, \quad d\vec{J} = \vec{\Omega} \times \vec{J} dt,$$

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{J} = \vec{M}, \quad \text{de unde } \vec{M} = \vec{\Omega} \times \vec{J} = \vec{\Omega} \times \vec{\omega} I. \quad (6.93)$$

Invers, dacă axa giroscofului $\vec{\omega}$ (inițial paralelă cu Ox) este rotită în jurul axei Oz cu viteza $\vec{\Omega}$, ea va exercita asupra lagărelor forțe de reacțiune (forțe giroscoapice) cu momentul

$$\vec{M}' = -\vec{M} = -\vec{\Omega} \times \vec{\omega} I, \quad (6.94)$$

antiparalel axei Oy (efect giroscoptic).

6.15.2. TÎRTEZUL

Fie un giroscof cu pînt de sprijin fix, în cîmpul gravitațional terestru (tîrtezuł sau sîrteaza) (fig. 6.20). Momentul cuplului format de forța de greutate $m\vec{g}$ și reacțiunea normală $\vec{N} = -m\vec{g}$, anume $\vec{M} = m\vec{g} \sin \alpha$, este tot

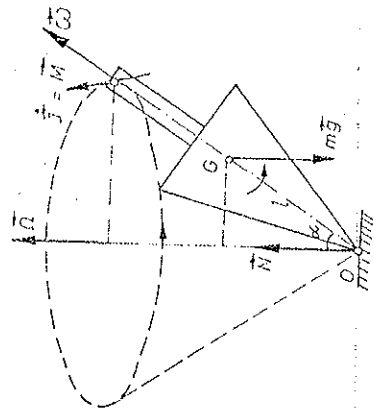


Fig. 6.20

tiimpul perpendicular pe planul \$(\vec{\omega}, \vec{g})\$, de aceea și capătul vectorului \$\vec{J} = I\vec{\omega}\$ se deplasează în același sens cu \$\vec{M}\$, deci axa de rotație \$\vec{\omega}\$ descrie un con cu axă verticală:

$$\begin{aligned}\vec{M} dt &= d\vec{J} = \vec{\Omega} \times \vec{J} dt, \quad |\vec{J}| = \\ &= \Omega J \sin \alpha = M = mgl \sin \alpha, \\ \Omega &= \frac{mgl}{I\omega}.\end{aligned}\quad (6.95)$$

Titirezul efectuează o mișcare de precesie \$\vec{\Omega}\$ în jurul verticalei, în același sens cu rotația proprie \$\vec{\omega}\$.

6.15.3. APLICAȚII

Giroscopul are mai multe aplicații tehnice. Proprietatea giroscopului de a-și păstra fixă direcția axei sale este folosită pentru stabilizarea direcției de zbor a torpililor sau rachetelor: un giroscop în suspensie cardanică acționează asupra dispozitivului de direcție al torpilei (sau rachetei).

De asemenea, datorită unor ghinturi în teava tunului, proiectilele capătă o rotație proprie rapidă care le stabilizează direcția axei. În navigația maritimă și aeriană se folosește busola giroscopică (compas giroscopic) în care axa giroscopului arată mereu direcția Sud-Nord.

Giroscopie mari sînt folosite pentru atenuarea balansului vapoarelor datorită valurilor (stabilizatoare giroscopice).

Efectele giroscopice pot fi și dăunătoare. Astfel, la virajul vapoarelor sau avioanelor, axa longitudinală a turbinelor va exercita presiuni asupra lagărelor, producînd oscilații sau chiar distrugerea rulmenților.

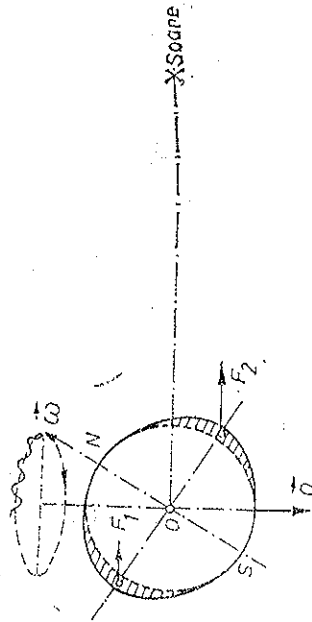


Fig. 6.21

Pământul, datorită rotației sale diurne, reprezintă un inens giroscop, cu axa înclinată cu \$23^{\circ}30'\$ față de planul eclipticii. Datorită nesfericității Pământului rezultanta forțelor de atracție solară nu trece prin centrul Pământului, ci dă un moment ca în fig. 6.21, care face ca axa Pământului să

execute o mișcare de precesie, descriind un con, cu o perioadă de \$\approx 25\ 800\$ ani. Datorită influenței Lunii, polul ceresc descrie de-a lungul circumferinței de precesie o curbă asemănătoare sinusoidelor. Această mișcare se numește *nulație*, și are o perioadă de \$\approx 19\$ ani.

6.16. MIȘCAREA PLAN-PARALELĂ

a) În cazul mișcării rigidului în spațiu aplicăm ecuațiile (6.49) pentru mișcarea de translație în SL:

$$\vec{F} = m\vec{a}_{cm} = m\vec{\varepsilon} \times \vec{r}_{cm} + m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{cm}) \quad (6.96)$$

și ecuația (6.45) \$\vec{M}_0 = I_0\vec{\varepsilon} + \vec{\omega} \times \vec{S}\$ în SCM. Această din urmă ecuație se poate scrie *pe componente față de un SC propriu cu originea în CM*, dar cu vectorii \$\vec{\omega}\$ și \$\vec{\varepsilon}\$ calculați în SL sau SCM:

$$\vec{M}' = \sum_i \vec{r}'_i \times \vec{F}_i = \vec{I}'\vec{\varepsilon} + \vec{\omega} \times (\vec{I}'\vec{\omega}), \quad (6.97)$$

unde \$\vec{I}'\$ este matricea momentelor de inerție ale rigidului față de un SC propriu cu originea în CM al rigidului (\$\vec{I}' = \text{const}\$), \$\vec{\omega}\$ și \$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}\$ sînt viteza și accelerația unghiulară ale rigidului față de SL sau SCM și \$\vec{M}'\$ este momentul resultant al forțelor față de CM.

b) În cazul mișcării *plan-paralele* axa de rotație este perpendiculară pe planul mișcării. Alegem ca de obicei axa \$Oz\$ paralelă cu \$\vec{\omega}\$ (perpendiculară

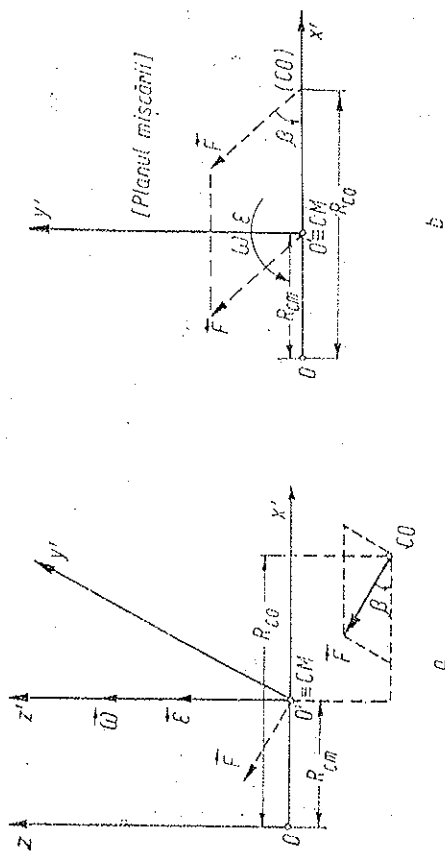


Fig. 6.22

pe planul mișcării). Este comod să scriem ecuațiile vectoriale pe componente față de un SC propriu cu originea \$O'\$ în CM. Alegem axa \$O'x'\$ paralelă cu \$Oz\$, iar axa \$O'y'\$ astfel ca să treacă prin \$O\$ (fig. 6.22), \$OO' = R_{cm}\$. Atunci \$\vec{\omega}\$ și \$\vec{\varepsilon}\$ nu au decît componente pe \$Oz\$ (\$O'z'\$):

$$\omega_z = \omega'_z = \omega, \quad \varepsilon_z = \varepsilon'_z = \varepsilon. \quad (6.98)$$

Ecuția mișcării de translație a CM (6.96) devine:

$$\vec{F} = m\vec{a}_{cm} \text{ sau } \vec{F} = m\vec{\varepsilon} \times \vec{R}_{cm} - m\omega^2 \vec{R}_{cm} = mR_{cm}(-\omega^2, \varepsilon, 0), \quad (6.99)$$

$$F = mR_{cm}\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Ecuția mișcării de rotație (6.97) devine:

$$\vec{M}' = \vec{I}'\vec{\varepsilon} + \vec{\omega} \times (\vec{I}'\vec{\omega}) = (I'_{xx}\varepsilon - I'_{yy}\omega^2, I'_{yy}\varepsilon + I'_{xx}\omega^2, I'_{zz}\varepsilon). \quad (6.100)$$

Acest moment conține o parte paralelă cu \vec{F} :

$$\vec{M}'_{||} = I'_{yy}(-\omega^2, \varepsilon, 0), \quad M'_{||} = I'_{yy}\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}, \quad (6.101)$$

restul fiind perpendicular pe \vec{F} .

Prin urmare, sistemul de forțe aplicate rigidului se reduce la rezultanta \vec{F} (6.99) aplicată în CM plus cuplul \vec{M}' (6.100) sau la rezultanta \vec{F} de-a lungul axei centrale, aplicată de exemplu în centrul de oscilație definit prin coordonatele:

$$\vec{r}_{co} = (I'_{zz}/mR_{cm}, 0, -I'_{xx}/mR_{cm}) \quad (6.102)$$

plus cuplul longitudinal (6.101).

Dacă $I'_{zz} = 0$, forțele se reduc numai la rezultanta \vec{F} (6.99), aplicată în centrul de oscilație (6.102) situat la distanța

$$R_{co} = R_{cm} + I'_{zz}/mR_{cm} = I_{zz}/mR_{cm} \quad (6.103)$$

față de axa Oz („lungimea redusă”).

Pe direcția axei de rotație ecuația (6.100) dă

$$M'_{||} = I'_{zz}\varepsilon, \quad (6.104)$$

adică, momentul rezultant în raport cu axa centrală de rotație, $M'_{||}$, este egal cu momentul de inerție în raport cu această axă, I'_{zz} , înmulțit cu accelerația unghiulară ε .

În particular, dacă R_{cm} este constant, obținem rotația în jurul axei fixe (§ 6.11).

În cazul rostogolirii corpurilor în jurul unei axe principale centrale: $I'_{zz} = I'_{yy} = 0$, și ecuația (6.100) se reduce la (6.104).

La ecuațiile (6.99), (6.104) se adaugă de obicei condiții suplimentare, fie restricții pentru mișcare, de exemplu condiția de nealunecare la rostogoliri, fie condiții pentru forțele de frecare.

Deoarece în mișcarea plan-paralelă există în fiecare moment un punct fix al rigidului — centrul instantaneu de rotație (centrul vitezelor) C , se poate scrie ecuația rotației $M_{||} = J_{||}\varepsilon$ față de axa trecând prin C :

$$M_{||} = J_{||}\varepsilon = I\vec{\omega} = I\varepsilon, \quad (6.105)$$

unde I este momentul de inerție față de axa care trece prin C (se exprimă prin momentul de inerție central I_0 folosind teorema lui Steiner) și $M_{||}$ este momentul forțelor față de această axă.

Exemple. a) Peste un scripete de masă m , moment de inerție I și rază R sunt înfășurate simetric în sensuri opuse două fire, unul fiind fix de suspenzie, iar celălalt având atârnat la capăt un corp de masă M ca în fig. 6.23. Să se afle accelerația CM a scripetului și tensiunile din fire.

Rezolvare. $Mg - T_2 = Ma'$, $a' = 2Re$, $mg + T_2 - T_1 = ma$, $a = \varepsilon R$, $I'\varepsilon = mgR + T_2 \cdot 2R$, unde $I' = I + mR^2$.

Corpul M nu poate avea o accelerație $a' > g$. Calculăm T_2 :

$$T_2 = \frac{Mg}{C} (1/mR^2 - 1), \text{ unde } C = 1 + \frac{4M}{m} + \frac{I}{mR^2}.$$

Dacă $T_2 > 0$, adică $I > mR^2$ ($a' < g$), obținem:

$$a = \frac{g}{C} \left(1 + \frac{2M}{m} \right), \quad T_2 = \frac{Mg}{C} \left[1 + \frac{I}{R^2} \left(1 + \frac{1}{m} \right) \right].$$

Dacă $I < mR^2$, trebuie pus $T_2 = 0$ ($a' = g$) și atunci ecuațiile sînt

$$mg - T_1 = ma, \quad I'\varepsilon = mgR, \quad a = \varepsilon R,$$

de unde

$$a = g \frac{mR^2}{I'}, \quad T_1 = mg \frac{I}{I'}, \quad (T_2 = 0).$$

Fig. 6.23

b) Pe o masă orizontală se află un mosor de ață de masă m , rază r , R , moment de inerție I și coeficient de frecare la alunecare μ . De capătul firului se trage cu o forță F care face unghiul α cu orizontala (fig. 6.24). Să se calculeze accelerația CM.

Rezolvare. Mosorul se poate rostogoli într-un sens sau altul după cum suportul forței \vec{F} trece de o parte sau de alta a punctului de contact C .

$$F \cos \alpha - F_f = ma; \quad F \sin \alpha + N - mg = 0; \quad F_f R - Fr = I\varepsilon.$$

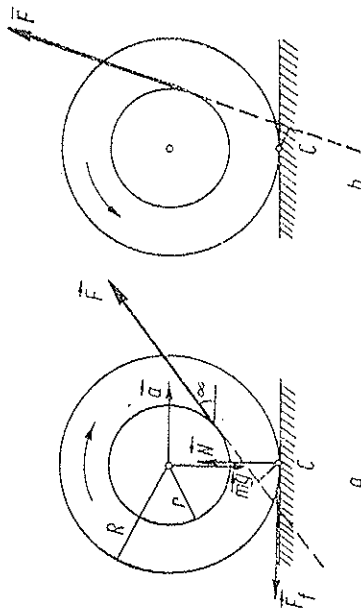


Fig. 6.24

În cazul rostogolirii fără alunecare, $a = \varepsilon R$, și obținem:

$$a = \frac{F \cos \alpha - r/R}{m \left(1 + I/mR^2 \right)}, \quad F_f = F \frac{I \cos \alpha + mrR}{I + mR^2}.$$

Condiția de nealuneare este evident $F_f < \mu N = \mu(mg - F \sin \alpha)$. Măsurul se va rostogoli spre noi ($\alpha > 0$) dacă $\cos \alpha > r/R$.

În cazul alunecării $F_f = \mu N$ (și $\alpha \neq 0$) și ecuațiile sînt:

$$F \cos \alpha - \mu N = ma, \quad F \sin \alpha + N - mg = 0, \quad \mu NR - Fr = I\epsilon,$$

de unde

$$a = \frac{F}{m} (\cos \alpha + \mu \sin \alpha) - \mu g,$$

$$\epsilon = \frac{\mu R}{I} (mg - F \sin \alpha) - F r / I.$$

Pentru $\mu \rightarrow 0$ măsorul alunecă spre noi ($\alpha > 0$), rotindu-se în sens invers (înapoi) ($\epsilon < 0$).

c) O tijă omogenă de lungime l și masă m este prinsă la un capăt printr-o articulație de o axă verticală, într-o poziție înclinată de unghi α , celălalt capăt al tijei fiind legat printr-un fir orizontal de axă (fig. 6.25). Să se calculeze forța de reacțiune R din articulație și tensiunea din fir, cînd tijă se rotește cu viteza unghiulară $\omega = \text{const}$ în jurul axei verticale.

Rezolvare. Putem aplica formulele stabilite pentru rotația în jurul axei, dar uneori se aplică direct ecuațiile:

$$\vec{F} = \int \vec{a} dm = m \vec{a}_{cm} \text{ și } \vec{M} = \int \vec{r} \times \vec{a} dm. \quad (6.106)$$

Să aplicăm ultima ecuație față de articulație (articulația ideală nu dă moment):

$$mg \frac{l}{2} \sin \alpha + T l \cos \alpha = \int_0^l r \cos \alpha \cdot r \sin \alpha \cdot \omega^2 \cdot \frac{m}{l} dr = \frac{1}{3} \sin \alpha \cos \alpha m l^2 \omega^2,$$

de unde

$$T = \frac{m}{2} \left(\frac{2}{3} l \omega^2 - g \tan \alpha \right).$$

Deoarece trebuie ca $T > 0$ (altfel tijă stă vertical), poziția din figură este posibilă pentru

$$\omega^2 > \frac{5}{2} \frac{g}{l} \tan \alpha = \omega_0^2.$$

Ecuația $\vec{F} = m \vec{a}_{cm}$ dă (fig. 6.25) pe componente:

$$R_x - T = m \cdot \frac{l}{2} \sin \alpha \cdot \omega^2, \quad R_y - mg = 0,$$

de unde

$$R_x = \frac{m}{2} \left[\frac{l}{2} \omega^2 \left(\frac{4}{3} \sin \alpha \right) - g \tan \alpha \right], \quad R_y = mg.$$

Pentru $\omega \rightarrow \omega_0$, R_x devine: $R_x = -\frac{3}{4} g \tan \alpha \sin \alpha$. La turația $\omega_c = \frac{6 g \tan \alpha}{l(4 - 3 \sin \alpha)}$,

$R_x = 0$ și la turații mai mari R_x va avea sensul din figură.

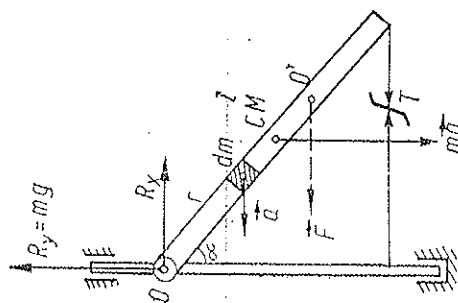


Fig. 6.25

Observație. Rezultanta forțelor aplicate $\vec{F} = \int \vec{a} dm = m \vec{a}_{cm}$ și momentul forțelor aplicate

$\vec{M} = \int \vec{r} \times \vec{a} dm$ pot fi reduse numai la rezultanta \vec{F} dar aplicată în centrul de oscilație O' situat la distanța $R_{co} = \frac{2}{3} l$ de la articulație. În adevăr,

$$F \cdot R_{co} \cos \alpha = M \text{ sau } m \frac{l}{2} \sin \alpha \cdot \omega^2 \cdot R_{co} \cos \alpha = \frac{1}{3} \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot m l^2 \omega^2,$$

de unde $R_{co} = \frac{2}{3} l$.

d) Un punct O al unei plăci plane, care se mișcă în planul său așezat orizontal, este la un moment dat fixat. Înainte de fixare viteza punctului O era v_0 și viteza unghiulară ω_0 . Să se afle viteza unghiulară a plăcii imediat după fixarea punctului O , cunoscând raza de girație R_y a plăcii față de CM , distanța P_0 dintre O și CM , și unghiul α dintre \vec{v}_0 și $O-CM$ (fig. 6.26).

Rezolvare. Aplicăm ecuațiile (4.40):

$$\vec{H} = m \Delta \vec{v}_{cm} \text{ și } \vec{K} = \Delta \vec{S} \text{ (față de } CM), \quad (6.107)$$

unde în cazul nostru al *cicnirilor*:

$$\vec{K} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i. \quad (6.108)$$

Înainte de fixare luăm pe O drept pol:

$$\vec{v}_{cm} = \vec{v}_0 + \vec{\omega}_0 \times \vec{R}_0$$

și după fixare:

$$\vec{v}'_{cm} = \vec{\omega} \times \vec{R}_0.$$

Cele două ecuații dau:

$$\vec{H} = m \Delta \vec{v}_{cm} = m(\vec{\omega} - \vec{\omega}_0) \times \vec{R}_0 = m \vec{v}_0,$$

$$\vec{K} = -\vec{R}_0 \times \vec{H} = I_C \Delta \vec{\omega} = I_0(\vec{\omega} - \vec{\omega}_0).$$

Față de SC ales, avem pe componente:

$$H_x = -m v_0 \cos \alpha, \quad H_y = m R_0(\omega - \omega_0) = m v_0 \sin \alpha,$$

$$K_z = -H_y R_0 = I_0(\omega - \omega_0), \quad (I_0 = m R_0^2).$$

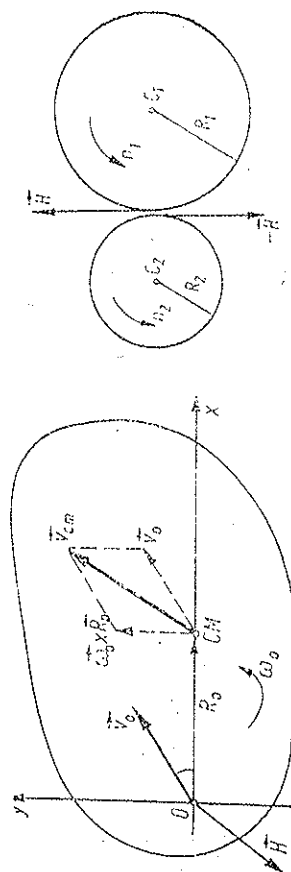


Fig. 6.26

Fig. 6.27

de unde rezultă:

$$\omega = \omega_0 + \frac{v_{R_0} \sin \alpha}{R_0^2 + R_0^2}, \quad \left(H_y = -m v_{R_0} \sin \alpha \frac{1}{1 + R_0^2/R_0^2} \right).$$

e) Două roți dințate de raze $R_{1,2}$, momente de inerție $I_{1,2}$ și turații $n_{1,2}$, având axele de rotație paralele, sînt la un moment dat cuplate, ca în fig. 6.27. Să se calculeze turațiile după cuplare și cantitatea de căldură degajată.

Rezolvare. Aplicăm ecuația $\vec{K} = \Delta \vec{J}$, în cazul nostru $\vec{K} = I \Delta \omega$, separat pentru fiecare roată (considerăm n, ω pozitive în sens trigonometric):

$$-HR_1 = I_1(\omega'_1 - \omega_1), \quad -HR_2 = I_2(\omega'_2 - \omega_2)$$

și condiția de cuplare:

$$\omega'_1 R_1 = -\omega'_2 R_2,$$

de unde rezultă:

$$n'_1 = -R_2 A, \quad n'_2 = R_1 A, \quad \text{unde } A = \frac{n_1 I_2 R_1 - n_2 I_1 R_2}{I_1 R_2^2 + I_2 R_1^2},$$

$$Q = -\frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 - \frac{1}{2} I_1 \omega_1'^2 - \frac{1}{2} I_2 \omega_2'^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{I_1 I_2}{I_1 R_2^2 + I_2 R_1^2} (\omega_1 R_1 + \omega_2 R_2)^2.$$

PROBLEME

1. Să se demonstreze formulele de mai jos pentru momentele de inerție față de un SC central cu axa $Oz = Oz_2$ și cu axele Oxy rotite cu unghiul α față de axele principale centrale Ox_1x_2 (fig. 6.28):

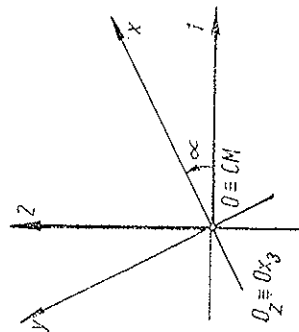


Fig. 6.28

$$I_{xx} = I_1 \cos^2 \alpha + I_2 \sin^2 \alpha, \quad I_{yy} = I_1 \sin^2 \alpha + I_2 \cos^2 \alpha, \quad I_{zz} = I_3;$$

$$I_{xy} = (I_3 - I_1) \sin \alpha \cos \alpha, \quad I_{yz} = 0, \quad I_{xz} = 0.$$

(6.109)

2. O placă subțire omogenă dreptunghiulară se rotește în jurul unei laturi ale sale așezate vertical. Fiecare element de suprafață al plăcii întinpină din partea aerului o forță de rezistență proporțională cu aria elementului și cu pătratul vitezei sale. Cunoșcînd turația inițială $n_0 = 10,0$ rotații a plăcii și timpul $\tau = 1,00$ s după care această turație se reduce la jumătate, să se calculeze numărul de ture efectuate de placă în timpul acestui τ .

$$R. \quad N = -\frac{n_0^2}{\omega_0^2} \frac{1}{\omega} = n_0 \ln 2 = 6,9 \text{ rot.}$$

3. O tijă subțire omogenă de lungime l și masă m se rotește într-un plan orizontal în jurul unui capăt fix (fig. 6.29). Să se afle rezultanta \vec{F} a forțelor aplicate tijei, în momentul cînd viteza unghiulară a tijei este ω și accelerația unghiulară ε .

$$R. \quad F_t = \frac{1}{2} m \varepsilon l, \quad F_n = \frac{1}{2} m \omega^2 l, \quad F = \frac{1}{2} m l \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}.$$

aplicată în centrul de oscilație situat la distanța $\frac{2}{3} l$ de capăt.

4. O tijă subțire omogenă se poate roti liber într-un plan vertical în jurul unei articulații care împarte tija în segmente de lungime a, b . Tija este rotită uniform cu viteza unghiulară ω

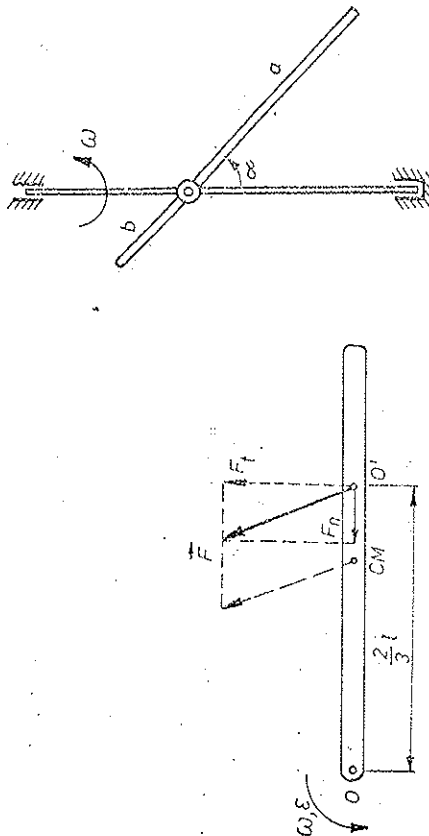


Fig. 6.29

Fig. 6.30

în jurul unei axe verticale trecînd prin articulație (fig. 6.30). Să se calculeze unghiul cu care deviază tija de la poziția verticală.

$$R. \quad \cos \alpha = \frac{3}{2} \frac{g}{\omega^2} \frac{a-b}{a^2 - ab + b^2}.$$

5. Un disc subțire omogen de rază R și masă m se rotește uniform cu viteza unghiulară ω în jurul unei axe verticale centrale care face unghiul α cu normala la disc. Să se calculeze momentul cuplului rezultant al forțelor exercitate de axă asupra discului.

$$R. \quad \vec{M} = \frac{m}{4} \omega R^2 \cos \alpha \cdot \vec{n} \times \vec{\omega}, \quad \vec{n} - \text{versorul normalei la disc.}$$

6. Un om de masă m se află pe un disc orizontal care se poate roti liber în jurul unei sale verticale fixe, avînd momentul de inerție I . Inițial sistemul este în repaus; apoi omul începe să meargă pe disc cu viteza constantă u față de disc pe o circumferință de rază R . Să se afle: a) turația n a discului; b) deplasarea unghiulară θ_0 a omului față de pămînt la o tură completă pe disc; c) forța \vec{F} exercitată de om asupra discului.

$$R. \quad a) \quad n = -\frac{u}{2\pi R} \frac{1}{1 + I/mR^2}; \quad b) \quad \theta_0 = \frac{2\pi}{1 + mR^2/I}; \quad c) \quad \text{componenta verticală } F_v =$$

$$= -mg, \text{ iar cea radială } F_r = \frac{m u^2}{R (1 + mR^2/I)^2}.$$

7. O tijă subțire omogenă de lungime l se poate roti liber în spațiu în jurul unui capăt al său fixat într-o articulație. Se aduce tijă în poziție orizontală și i se imprimă o viteză unghiulară inițială ω_0 în planul orizontal. Să se afle unghiul minim pe care-l face tijă cu verticala în timpul mișcării.

R. $\cos \alpha_m = \sqrt{\frac{2}{3}} + 1 - b$, unde $b = l\omega_0^2/6g$.

8. O tijă subțire omogenă sub formă de arc de cerc (de rază R) este suspendată la mijloc pe un cui bătut în perete. Să se afle perioada micilor oscilații în planul vertical paralel cu peretele.

R. $T = 2\pi \sqrt{\frac{2R}{g}}$ (independent de lungimea arcului de cerc).

9. O bară subțire omogenă de lungime l este suspendată la distanța x de centrul barei pe un cui bătut în perete. Care este perioada minimă a micilor oscilații în planul vertical paralel cu peretele?

R. $T_m = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g/3}}$ pentru $x_m = \frac{l}{2\sqrt{3}}$ (raza de inerție).

10. Să se arate că perioada oscilațiilor unui pendul fizic nu se schimbă dacă în centrul de oscilație se adaugă o masă punctiformă arbitrară. Să se afle la ce distanță R_m de CM al pendulului de masă m și moment de inerție central I_0 trebuie să treacă axa de rotație pentru ca perioada oscilațiilor mici să fie minimă.

R. $R_m = \sqrt{I_0/m}$ — raza de rotație față de axa centrală paralelă cu axa de rotație.

11. Peste un scripete de masă m , moment de inerție I și rază R este înfășurat un fir. Un capăt al firului este prins de tavan, iar celălalt are atârnat un corp de masă M . Să se afle accelerația cu care coboară scripetele și tensiunile din fire.

R. $a = \frac{gmR^2}{I + mR^2}$, $T_1 = Mg + \frac{mgI}{I + mR^2}$, $T_2 = Mg$.

12. Peste un scripete ideal, care se rotește în jurul unei sale orizontale fixe, este trecut un fir. De un capăt al firului este legat un corp de masă m , iar celălalt capăt este înfășurat pe un alt scripete de aceeași masă m , de rază R și de moment de inerție I . a) Să se calculeze accelerația acestui din urmă scripete și tensiunea din fir. b) Cât devine această accelerație dacă corpul m de la celălalt capăt al firului se dezleagă și în locul său se trage în jos cu o forță egală cu greutatea corpului dezleagat (mg)?

R. a) $a = \frac{g}{1 + 2I/mR^2}$, $T = \frac{mg}{1 + mR^2/2I}$; b) $a = 0$.

13. Un cilindru omogen rigid de masă $m = 2,00$ kg și rază $R = 4,9$ cm, cărui i se imprimă o rotație $n = 15,0$ rot/s, este așezat pe o masă orizontală rigidă cu coeficientul de frecare la înfășurare $\mu = 0,10$ și lăsat liber. Să se afle: a) după cât timp mișcarea cilindrilor trece în rostogolire fără alunecare; b) câte rotații efectuează cilindrul în acest timp; c) câtă căldură se degajă în acest timp; d) ce mișcare și ce rotație are cilindrul după acest timp.

R. a) $\tau = \frac{2\pi n R}{3\mu g} = 1,57$ s; b) $N = \frac{4\pi n^2 R}{9\mu g} = 15,7$ rot; c) $Q = \frac{2}{3} \pi^2 n^2 m R^2 = 7,1$ J;

d) rostogolire uniformă cu viteză $v' = n/3 = 5$ rot/s.

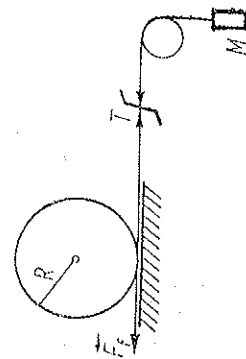


Fig. 6.31

14. Pe un disc de masă m , rază R și moment de inerție I este înfășurat un fir în jurul perimetrului său. Unul dintre capetele firului este fixat la un punct fix, iar celălalt capăt este atârnat de un corp de masă M . Să se calculeze: forța de frecare, tensiunea din fir, accelerația discului.

R. a) În cazul nealunecării, toful va fi în repaus sau rostogolire uniformă și M în repaus.

$a = 0$, $T = Mg$, $F_f = T = Mg$, $\mu > M/m$.

b) În cazul alunecării:

$T = Mg \frac{1 + 3\mu}{1 + 3M/m}$, $a = g \frac{M - \mu m}{m + 3M}$, $\varepsilon = \frac{2g}{R} \frac{M - \mu m}{m + 3M}$, $a' = \frac{3g}{m + 3M}$.

15. Pe un plan înclinat de unghi α se rostogolește liber în jos un corp rotund omogen (cilindru sau sferă) de masă m , rază R și moment de inerție central I . Să se afle: a) forța de frecare și coeficientul de frecare la alunecare minim necesar pentru ca corpul să nu alunece, b) accelerația CM; c) accelerația unghiulară; d) distanța axei instantanee de rotație până la CM; e) condiția de nealunecare: $\tan \alpha < \mu(1 + mR^2/I)$.

R. În cazul alunecării: $F_f = \frac{mg \sin \alpha}{1 + mR^2/I}$, condiția de nealunecare: $\tan \alpha < \mu(1 + mR^2/I)$.

$a = \frac{g \sin \alpha}{1 + I/mR^2}$, $\varepsilon = a/R$, $R_c = R$.

În cazul alunecării: $F_f = \mu mg \cos \alpha$, $a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$, $\varepsilon = \mu mg R \cos \alpha / I$, $R_c = \frac{a}{a/\varepsilon} = I(\tan \alpha - \mu) / \mu m R$.

16. Un corp rotund omogen (sferă, cilindru) de masă m , rază R și moment de inerție I este așezat, cu coeficientul de frecare la alunecare μ , pe o scindură de masă m' , așezată la rîndul ei pe o masă fixă cu coeficientul de frecare la alunecare μ' . Scindura este trasă orizontal cu o forță F astfel încît lunecă pe masă. Să se calculeze: a) forța de frecare dintre corp și scindură și condiția de nealunecare a corpului pe scindură; b) accelerațiile scindurii și corpului; c) accelerația unghiulară a corpului; d) poziția axei instantanee de rotație a corpului.

R. a) În cazul nealunecării, $F_f = \frac{F - \mu'(m + m')g}{1 + (1 + mR^2/I)m'/m}$, $F_f < \mu mg$; b) $a = F/m$.

$a' = \frac{1}{m} F(1 + mR^2/I)$; c) $\varepsilon = F_f R / I$, d) $R_c = I / mR$.

În cazul alunecării: a) $F_f = \mu mg$; b) $a = \mu g$, $a' = \frac{1}{m'} [F - \mu'(m + m')g - \mu mg]$;

c) $\varepsilon = \mu mg R / I$; d) $R_c = I / mR$.

17. Pe o masă orizontală este așezată vertical o mică halteră formată din două bile mici identice, legate printr-o tijă subțire de masă neglijabilă, avînd distanța l între ele. Bilei superioare i se imprimă la un moment dat, printr-o lovitură, o viteză inițială orizontală v (fig. 6.32). a) Cît trebuie să fie această viteză pentru ca bila inferioară să se desprindă imediat de masă? b) Cît trebuie să fie această viteză pentru ca bila inferioară să se desprindă imediat de masă și haltera să cadă apoi pe masă în poziție orizontală?

R. a) $v > \sqrt{2lg}$; b) $v = \frac{\pi}{2} \sqrt{lg} > \sqrt{2lg}$.

Fig. 6.32

18. Un om ține în mână de un capăt o tijă subțire uniformă de lungime l . La ce distanță de mână trebuie lovită tija pentru ca omul să nu simtă lovitură?

R. $\frac{2}{3}l$ — Lungimea redusă a pendulului fizic (în centrul de oscilație).

19. O placă plană se află în repaus în planul orizontal. Raza de giratie a plăcii în raport cu CM este R_g . Se aplică plăcii un impuls orizontal cu brațul b față de CM. Să se afle poziția centrului instantaneu de rotație după lovire. Unde trebuie fixat, imediat după aceasta, un punct al plăcii pentru ca ea să se oprească?

R. În centrul de oscilație O' situat la distanța R_g^2/b de CM pe linia perpendiculară pe \vec{H} . În O care, reciproc, este centrul de oscilație față de O' (fig. 6.33).

20. O bară neuniformă de masă M se poate roti liber în jurul unei articulații la capătul superior. La distanța k de la articulație, ea este lovită perpendicular de un glonț de masă m , care rămâne înfipt în bară. Știind unghiul maxim α de deviere a barei, distanța R_g a CM al barei pînă la articulație și momentul de inerție I față de articulație, să se afle viteza glonțului.

R. $v = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{g(h + MR_g/m) (1 + I/ml^2)}$.

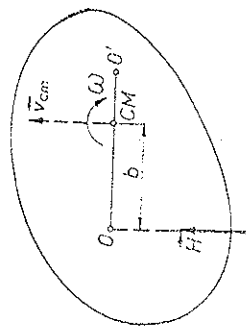


Fig. 6.33

21. De un stîlp cilindric vertical de rază R este prins un fir de lungime l avînd la capăt o bilă (fig. 6.34). I se imprimă bilei o viteză orizontală v perpendicular pe fir. Neglijînd frecările, să se afle după cît timp bila lovește stîlpul.

R. $t = \frac{l}{2Rv}$.

22. Un disc omogen de rază R , așezat orizontal și pus în rotație în jurul axei sale verticale cu viteza unghiulară ω este așezat pe un plan orizontal. Cunoșcînd coeficientul de frecare la alunecare μ și considerînd că presiunea exercitată de disc pe plan este uniformă, să se afle după cît timp discul se va opri.

R. $t = 3 \omega R / 4 \mu g$.

23. Un pendul conic este format dintr-o tijă subțire omogenă de lungime l , care se rotește în jurul axei verticale cu viteza unghiulară ω (capătul superior este prins într-o articulație fără frecări). Să se afle unghiul θ dintre tijă și axa verticală.

R. $\cos \theta = 3g / 2\omega^2 l$.

CAPITOLUL 7

STATICA SOLIDULUI RIGID

Statika studiază echilibrul corpurilor sub acțiunea forțelor. Vom arăta că în cazul solidului rigid toate forțele aplicate pot fi reduce la o singură forță și la un cuplu.

7.1. STATICA PUNCTULUI MATERIAL

Pentru echilibrul punctului material este necesar și suficient ca rezultanta tuturor forțelor aplicate să fie nulă:

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i = 0 \quad (7.1)$$

sau pe componente

$$F_x = \sum F_{ix} = 0, F_y = \sum F_{iy} = 0, F_z = \sum F_{iz} = 0. \quad (7.1')$$

În acest caz, conform legii fundamentale a dinamicii:

$$m\vec{a} = \vec{F} = 0, \vec{a} = 0, \vec{v} = \text{const}, \quad (7.2)$$

și dacă inițial particula era în repaus, ea va rămîne și mai departe în repaus. Grafic, poligonul forțelor trebuie să fie închis.

În cazuri particulare cele trei condiții de echilibru se pot reduce la două (forțe în plan) sau la una singură (forțe pe aceeași dreaptă suport).

7.2. DEPLASAREA FORȚEI

a) Pentru solidul rigid forța poate fi deplasată de-a lungul dreptei suport, adică este un vector *glisant* (alunecător) (P. Varignon). Aceasta este echivalent cu introducerea sau suprimarea unui sistem de două forțe egale în

modul și de sensuri opuse, situate *pe aceeași dreaptă*, ceea ce nu schimbă cu nimic starea rigidului, deoarece acesta este *nedeformabil*.

Introducem în punctul B un sistem identic nul de două forțe egale în modul și de sensuri opuse (\vec{F}' , $-\vec{F}'$) cu $|\vec{F}| = |\vec{F}'|$ (fig. 7.1). Forțele \vec{F} , $-\vec{F}'$ nu au nici un efect asupra solidului rigid și pot fi suprimate, astfel încât rămâne forța \vec{F}' , adică rezultatul deplasării forței \vec{F} din A în B.

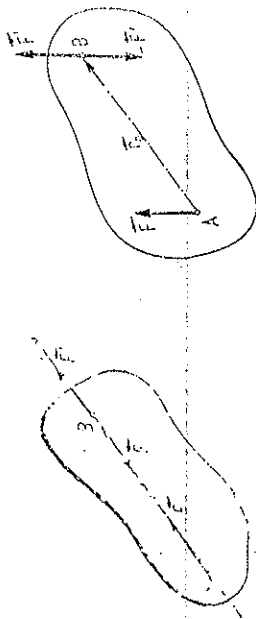


Fig. 7.1

Fig. 7.2

În cazul corpurilor deformabile forța nu poate fi deplasată pe suportul său, fiindcă astfel ar produce alte efecte de deformare (de exemplu, o bară împinsă la un capăt sau trasă cu aceeași forță de celălalt capăt).

b) O forță poate fi deplasată *paralel* cu ea însăși (adică *echipotent*), dar atunci apare și un *cuplu* de forțe, adică două forțe paralele, egale în modul și de sensuri opuse (fig. 7.2). În adevăr, introducem în B un sistem identic nul de două forțe egale în modul și de sensuri opuse (\vec{F}' , $-\vec{F}'$) cu $|\vec{F}| = |\vec{F}'|$. Atunci forța \vec{F} din A apare deplasată în B, anume \vec{F}' dar apare un cuplu de forțe (\vec{F} , $-\vec{F}'$).

c) *Momentul unui cuplu* de forțe față de orice punct din spațiu este același (fig. 7.3), deci este o proprietate *invariantă* a cuplului:

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F} + \vec{r}_2 \times (-\vec{F}) = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F} = \vec{r}_0 \times \vec{F} = -\vec{r}_0 \times (-\vec{F}). \quad (7.3)$$

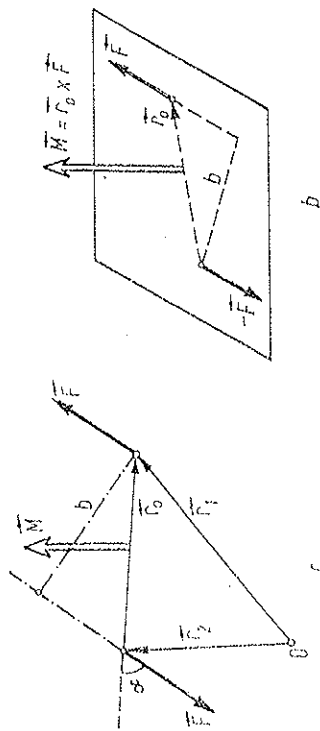


Fig. 7.3

Vectorul \vec{M} este perpendicular pe planul (\vec{F} , $-\vec{F}$) și are modulul:

$$M = F r_0 \sin \alpha = F b, \quad (7.4)$$

unde b este *brațul cuplului*, adică distanța dintre suporturile celor două forțe.

Cuplul (\vec{F} , $-\vec{F}'$) din fig. 7.2, generat de deplasarea forței \vec{F} din A în B ($\vec{r}_0 = \vec{AB}$) are momentul $\vec{r}_0 \times -\vec{F}' = -\vec{r}_0 \times \vec{F} = \vec{M}$.
d) Forța \vec{F} din A în fig. 7.2 are față de punctul B același moment $-\vec{r}_0 \times \vec{F} = \vec{r}_0 \times (-\vec{F})$ ca și cuplul generat (\vec{F} , $-\vec{F}'$), forța \vec{F}' avînd moment nul față de B.

Prin deplasarea unei forțe \vec{F} din punctul A într-un punct B cu vectorul $\vec{r}_0 = \vec{AB}$ (fig. 7.4) momentul ei față de un pol oarecare P se schimbă cu

$$\begin{aligned} \Delta \vec{M} &= \vec{r}' \times \vec{F} - \vec{r} \times \vec{F} = \\ &= (\vec{r}' - \vec{r}) \times \vec{F} = \vec{r}_0 \times \vec{F}, \end{aligned} \quad (7.5)$$

adică minus momentul cuplului generat prin deplasarea forței sau minus momentul forței inițiale față de noul punct. Prin urmare, *dacă deplasăm echipotent o forță \vec{F} cu segmentul \vec{r}_0 , trebuie să introducem un cuplu compensator $\vec{M} = -\vec{r}_0 \times \vec{F}$ egal cu momentul forței inițiale față de noul punct* (moment care s-ar pierde prin deplasarea forței în acel punct).



Fig. 7.4

7.3. COMPUNEREA FORTELOR PARALELE

Introducem două forțe \vec{F} , $-\vec{F}$ egale în modul și de sensuri opuse în A, respectiv B, pe care le compunem cu forțele date. Obținem două forțe concurente pe care știm să le compunem după regula paralelogramului (fig. 7.5).

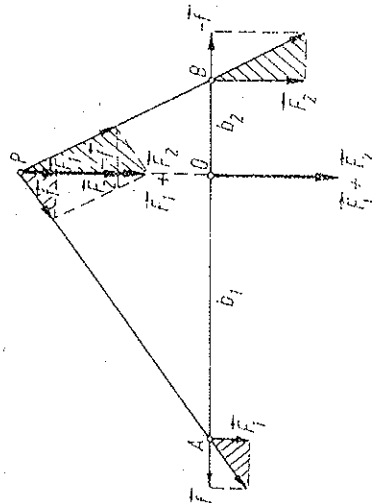


Fig. 7.5

Din asemănarea triunghiurilor rezultă:

$$\frac{F}{b_1} = \frac{F_1}{b_1} = f \cdot PO; \quad \frac{F}{b_2} = \frac{F_2}{b_2} = f \cdot PO,$$

de unde

$$F = F_1 + F_2, F b_1 = F_2 b_2 \text{ sau } F_1 F_2 = b_1 b_2 \quad (7.6)$$

adică condiția ca momentele celor două forțe F_1, F_2 față de un punct (O) de pe suportul rezultantei să fie egale în modul și opuse ca sens (dând moment rezultat nul, ca și rezultanta lor). Rezultanta este egală cu suma forțelor $F = F_1 + F_2$, este paralelă cu forțele date și situată la distanțele $b_{1,2}$ (7.6) de forțele date, mai aproape de forța mai mare.

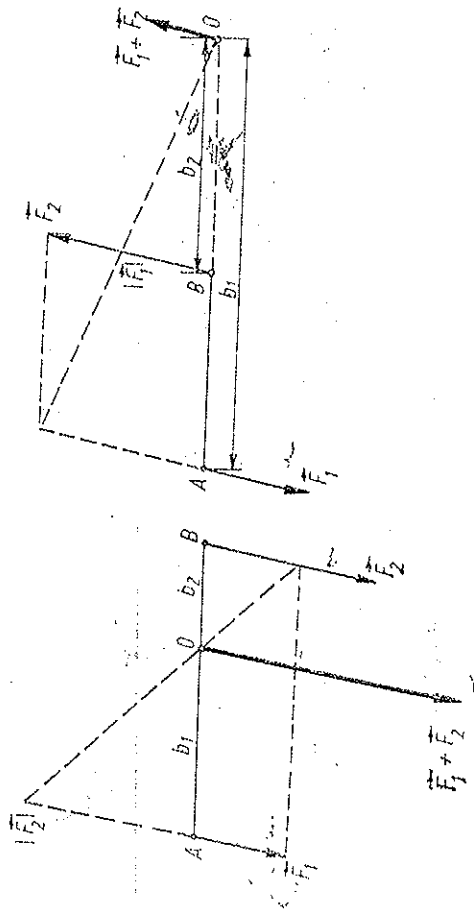


Fig. 7.6

O construcție analogă pentru forțe antiparalele (diferite în modul) nedă rezultanta $F = F_2 - F_1$, paralelă cu forțele date și situată la distanțele $b_{1,2}$ (7.6) de forțele date, dar în afara segmentului AB , de partea forței mai mari și în sensul forței mai mari (fig. 7.6; $b_{1,2}$ din figură nu sînt chiar distanțele dintre forțe, dar sînt proporționale cu ele și deci (7.6) este valabil).

Dacă $F_1 = F_2$ avem un cuplu cu rezultanta nulă, aruncată la infinit. O demonstrație mai rapidă și mai directă se obține deplasînd *echipolent* forțele date (conform regulii stabilite) în punctul O , definit prin raportul distanțelor sale $b_{1,2}$ pînă la forțele date, astfel ca $F b_1 = F b_2$ (interior sau exterior segmentului AB după cum forțele sînt paralele sau antiparalele) și combinînd forțele în acest punct O . Cuplurile generate prin deplasarea forțelor se anihilează reciproc tocmai datorită condiției impuse $F_1 b_1 = F_2 b_2$.

7.4. COMPUNEREA CUPLURILOR

Un cuplu dat, de moment \vec{M} , poate fi transformat în cazul *rigidelor* în oricare alt cuplu de moment echipolent cu \vec{M} . Cu alte cuvinte, cuplul poate fi deplasat oricum în planul său sau într-un alt plan paralel și poate fi schimbat brațul cuplului schimbînd însă în raport invers forțele, astfel ca vectorul

moment \vec{M} să rămînă același. Prin urmare (Louis Poincaré 1894):

Pentru rigide un cuplu de forțe este complet caracterizat de momentul său \vec{M} considerat vector liber.

O ilustrație este dată în fig. 7.7.

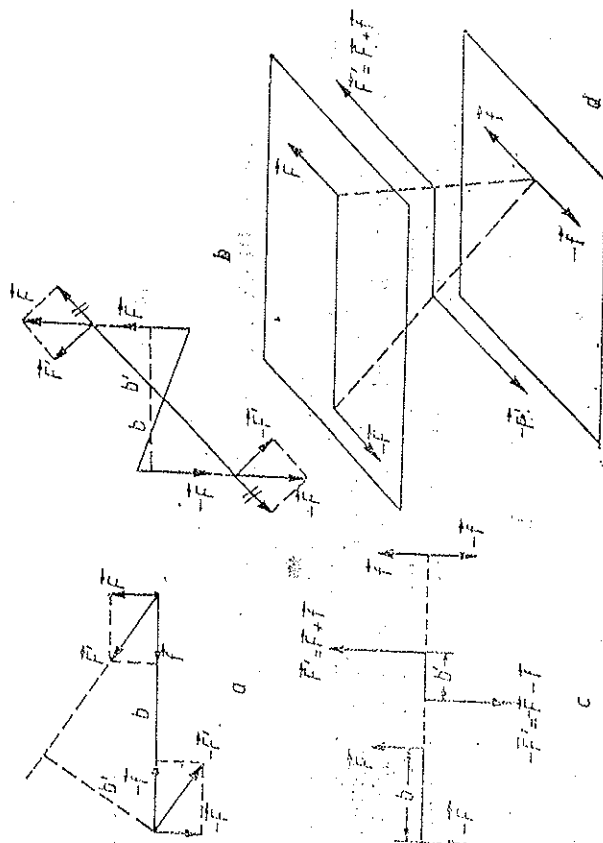


Fig. 7.7

Cuplurile se compun prin adunarea vectorială a momentelor lor, considerate vectori liberi.

În adevăr, dacă două cupluri sînt în plane paralele, deci și momentele lor sînt paralele, îi aducem în același plan, îi transformăm ca să aibă același braț și adunăm (sau scădem) forțele, atunci se adună (sau se scad) și momentele lor:

$$F = F_1 \pm F_2, F b = F_1 b_1 \pm F_2 b_2,$$

$$M = M_1 \pm M_2.$$

Dacă cele două cupluri sînt în plane *sceante*, îi transformăm să aibă *aceleași forțe*, aducem forțele opuse pe linia de intersecție a planurilor, unde ele se vor anula (punctul C , fig. 7.8) și rămîne cuplul din A, B . Triunghiurile ABC și $CM_1 M_2$ sînt asemenea, deoarece au un unghi

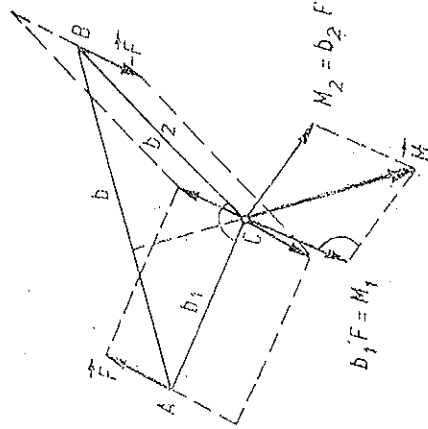


Fig. 7.8

egal $\star ACB = \star CM_1M$ (au laturi perpendiculare) cuprins între laturi proporționale:

$$CM_1 = b_1F = AC \cdot F, \quad M_1M = b_2F = CB \cdot F.$$

Rezultă că și latura a treia:

$$M = |\vec{M}_1 + \vec{M}_2| = AB \cdot F = bF$$

și este perpendiculară pe AB , deci momentul cuplului rezultat este în adevăr suma vectorială a momentelor cuplurilor componente.

7.5. REDUCEREA UNUI SISTEM DE FORȚE

a) Alegem un punct arbitrar O , numit *punct (centru) de reducere sau pol*. Deplasăm *echipolent* toate forțele în acest punct — atunci apar și cuplurile respective. Problema s-a redus astfel la compunerea forțelor concurente în punctul O , conform regulii paralelogramului, și la compunerea cuplurilor respective, adică la compunerea momentelor lor, tot după regula paralelogramului (fig. 7.9). Momentul oricărui cuplu generat este egal cu momentul forței respective față de pol.

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_s, \quad \vec{M} = \sum \vec{M}_s = \sum \vec{r}_s \times \vec{F}_s. \quad (7.7)$$

Un sistem arbitrar de forțe \vec{F}_s aplicate unui rigid se reduce, în raport cu un anumit pol, la o rezultantă $\vec{F} = \sum \vec{F}_s$ aplicată în pol, și la un cuplu al cărui

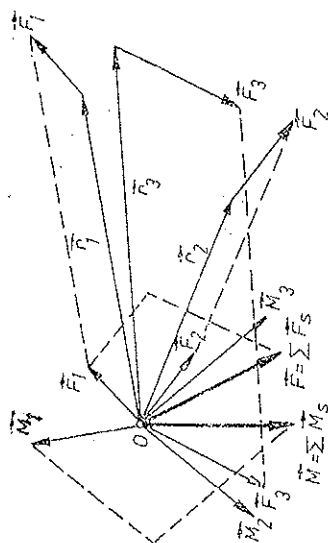


Fig. 7.9

moment \vec{M} este egal cu suma momentelor forțelor față de pol: $\vec{M} = \sum \vec{M}_s = \sum \vec{r}_s \times \vec{F}_s$.

Dacă acum reprezentăm cuplul \vec{M} prin cele două forțe astfel ca una din ele să fie aplicată în pol și o compunem acolo cu rezultanta \vec{F} , reducem astfel sistemul numai la două forțe:

Un sistem arbitrar de forțe aplicate unui rigid se reduce fie la un cuplu (două forțe antiparalele), fie la două forțe străbunde în spațiu (neparalele), dintre care una aplicată în polul ales și având o direcție aleasă.

b) Invarianții. Mărima rezultantei este independentă de alegerea polului:

Rezultanta se deplasează *echipolent* în noul pol.

Cuplul însă se schimbă, deoarece deplasind rezultanta în noul pol O' , va apărea un cuplu suplimentar, după cum știm (fig. 7.10):

$$\begin{aligned} \vec{M}' &= \sum \vec{r}'_s \times \vec{F}_s = \sum (\vec{r}_s - \vec{r}_0) \times \vec{F}_s = \\ &= \vec{M} - \vec{r}_0 \times \vec{F}, \end{aligned} \quad (7.8)$$

adică exact momentul rezultantei din vechiul pol O față de noul pol O' (în concordanță cu regula deplasării forței).

Momentul nu se schimbă dacă polul se deplasează pe suportul rezultantei (atunci $\vec{r}_0 \parallel \vec{F}$).

Dacă rezultanta este nulă, momentul este independent de alegerea polului și sistemul se reduce numai la un cuplu.

Înmulțind scalar (7.8) cu \vec{F} rezultă (produsul vectorial mixt este nul dacă doi vectori sînt egali sau paraleli):

$$\vec{F}\vec{M}' = \vec{F}\vec{M} = F\vec{M}' \cos(\vec{F}, \vec{M}') = FM \cos(\vec{F}, \vec{M}),$$

$$M'_\parallel = M_\parallel = \text{invar.}, \quad (7.9)$$

proiecția momentului pe forța rezultantă este independentă de alegerea polului (componenta longitudinală a momentului este un invariant sau produsul scalar $\vec{F}\vec{M}$ este un invariant).

Componenta transversală a momentului, perpendiculară pe forța rezultantă, se schimbă prin deplasarea polului.

c) Putem alege totdeauna polul astfel ca să anulăm componenta transversală a momentului, deci ca momentul rezultat să fie paralel cu forța rezultantă.

Teoremă. Sistemul de forțe aplicate unui rigid se poate reduce totdeauna la o rezultantă și un cuplu situat în planul perpendicular pe rezultantă, adică cu moment paralel cu rezultantă.

Dreapta suport a rezultantei se numește în acest caz *axa centrală* a sistemului de forțe.

În adevăr, dacă \vec{M} nu este paralel cu \vec{F} , alegem drept pol, de exemplu, punctul

$$\vec{r}_c = \frac{1}{F^2} \vec{F} \times \vec{M}. \quad (7.10)$$

Atunci, conform lui (7.8), noul moment \vec{M}' va fi:

$$\begin{aligned}\vec{M}' &= \vec{M} - \vec{r}_e \times \vec{F} = \vec{M} - \frac{1}{F_2} (\vec{F} \times \vec{M}) \times \vec{F} = \\ &= \vec{M} + \frac{1}{F_2} \vec{F} \times (\vec{F} \times \vec{M}) = \vec{M} + \frac{1}{F_2} \vec{F} (\vec{F} \cdot \vec{M}) - \vec{M} = \\ &= \frac{1}{F_2} \vec{F} (\vec{F} \cdot \vec{M}), \text{ paralel cu } \vec{F},\end{aligned}\quad (7.11)$$

adică în adevăr, noul moment este paralel cu \vec{F} .

Prin urmare, printr-o deplasare paralelă adecvată a rezultantei putem totdeauna "anula" componenta transversală a momentului resultant, componenta longitudinală fiind însă invariantă.

Considerațiile de mai sus privind reducerea unui sistem de forțe aplicate rigidului la o rezultantă și un cuplu seamănă cu considerațiile privind reducerea mișcării unui rigid la o rotație și o translație, adică reducerea vitezelor la o viteză de rotație (unghiulară) ω și o viteză de translație \vec{v}_0 . Forța \vec{F} corespunde vitezei unghiulare ω , iar cuplul \vec{M} corespunde vitezei de translație \vec{v}_0 (vom vedea mai târziu că un cuplu de rotații este echivalent cu o translație).

d) *Teorema lui P. Varignon* (1725). Momentul în raport cu un pol oarecare al rezultantei unui sistem de forțe concurente este egal cu suma vectorială a momentelor forțelor componente față de pol.

Aplicații. a) *Sistem de forțe conținute în plan.* Dacă rezultanta este nulă, sistemul este echivalent cu un cuplu. Alegând polul în plan, momentul resultant va fi perpendicular pe plan, și dacă rezultanta (conținută în plan) nu e nulă, o putem deplasa convenabil ca să anulăm momentul (care e transversal), deci în acest caz sistemul este echivalent cu o forță rezultantă situată pe o anumită dreaptă — axă centrală. Momentul resultant față de orice punct este de fapt momentul acestei rezultante unice față de acel punct.

Observații. 1. Cazul plan poate fi tratat elementar, compunind forțele succesiv după regula paralelogramului, fiind necesară pentru aceasta doar deplasarea forțelor pe suportul lor.

De exemplu, în fig. 7.11, compunem forțele \vec{F}_1, \vec{F}_2 deplasându-le pe pînă în punctul lor de intersecție: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_{12}$. Apoi compunem \vec{F}_{12} cu \vec{F}_3 , deplasându-le pe suporturile lor pînă în punctul de intersecție: $\vec{F}_{12} + \vec{F}_3 = \vec{F}_{123}$ și a.m.d. Pînă la urmă obținem o rezultantă $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$ situată pe un anumit suport — axă centrală a sistemului plan de forțe.

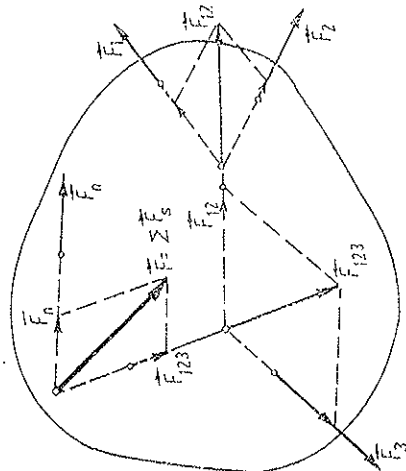


Fig. 7.11

Reciproc, orice forță poate fi descompusă după *arbitră* direcții date, coplanare cu ea, procedând invers ca mai sus.

2. Forța rezultantă a unui sistem de forțe plane (pot fi și forțe paralele) se poate obține prin metoda poligonului funicular.

Să considerăm pentru ilustrare cazul a trei forțe (fig. 7.12). Construim poligonul forțelor (fig. 7.12, b). Pentru a afla axa centrală sau suportul rezultantei, ducem dintr-un pol arbitrar

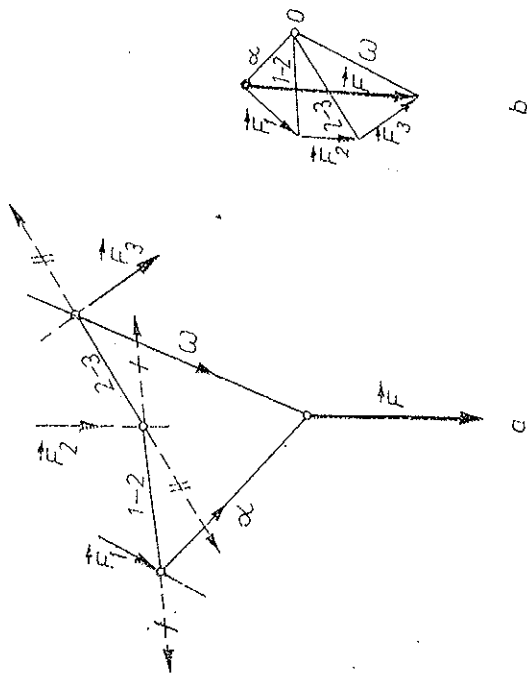


Fig. 7.12

trac O , "raze" care să-l unească cu originea și extremitatea fiecărei forțe din poligonul forțelor (fig. 7.12, b). Apoi printr-un punct arbitrar de pe suportul primei forțe \vec{F}_1 ducem o paralelă la prima "rază" α și o paralelă la raza 1-2 pînă la intersecția acesteia din urmă cu suportul forței \vec{F}_3 . Din acest punct ducem o paralelă la raza 2-3 pînă la intersecția suportului forței \vec{F}_2 și așa mai departe pînă la intersecția suportului ultimei forțe. Din acest ultim punct ducem o paralelă la ultima rază ω . La intersecția primei raze α cu ultima ω găsim un punct al rezultantei sau al axei centrale.

În adevăr, fiecare forță este diferența vectorială a celor două raze. Trasându-le pe laturile poligonului funicular, aceste raze se reduc două câte două (fiind opuse și pe același suport) afară de razele extreme α și ω , care dau rezultanta.

Dacă sistemul de forțe este în echilibru (rezultantă nulă și moment resultant nul), atunci poligonul forțelor se închide și poligonul funicular se închide (razele α și ω coincid).

Dacă sistemul de forțe se reduce la un cuplu, poligonul forțelor se închide, iar poligonul funicular rămîne deschis: cele două raze extreme α și ω vor fi paralele distincte.

b) *Sistem de forțe paralele în spațiu.* Rezultanta are aceeași direcție cu forțele (care pot fi paralele sau antiparalele). Momentele sînt perpendiculare pe forțe, deci conținute în planul perpendicular pe rezultantă. Sistemul se reduce fie la un cuplu, dacă rezultanta este nulă, fie la o rezultantă situată pe o dreaptă determinată — axă centrală, paralelă cu direcția forțelor date (v. compunerea forțelor paralele). Momentul resultant față de orice punct este de fapt momentul acestei forțe unice față de acel punct. În particular, obținem regulile cunoscute de compunere a două forțe paralele (sau antiparalele).

Mai mult, un sistem de forțe paralele în spațiu (cu rezultantă nenulă) adămite un centru al forțelor paralele, în sensul că rotind întregul sistem de forțe paralele, rezultanta (sau axa centrală) trece printr-un punct fix, definit prin vectorul de poziție:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{F} \sum F_k \vec{r}_k, \quad (F = \sum F_k), \quad (7.12)$$

unde \vec{r}_k sînt vectorii de poziție ai forțelor, iar $\vec{F}_k = F_k \vec{n}$, ($F_k = \pm |\vec{F}_k|$), unde \vec{n} este un versor ales pe direcția forțelor paralele (fig. 7.13) (centrul se schimbă dacă forțele sînt deplasate de-a lungul suporturilor lor).

În adevăr, momentul resultant al forțelor paralele

$$\sum \vec{r}_k \times \vec{F}_k = \sum \vec{r}_k \times F_k \vec{n} = \sum F_k \vec{r}_k \times \vec{n}$$

trebuie să fie identic cu momentul resultantei aplicate în centrul forțelor \vec{r}_c (7.12):

$$\vec{r}_c \times \vec{F} = \vec{r}_c \times F \vec{n} = F \vec{r}_c \times \vec{n},$$

independent de direcția sistemului de forțe paralele, adică independent de versorul direcției lor, \vec{n} :

$$\sum F_k \vec{r}_k \times \vec{n} = F \vec{r}_c \times \vec{n} \text{ sau } (\sum F_k \vec{r}_k - F \vec{r}_c) \times \vec{n} = 0,$$

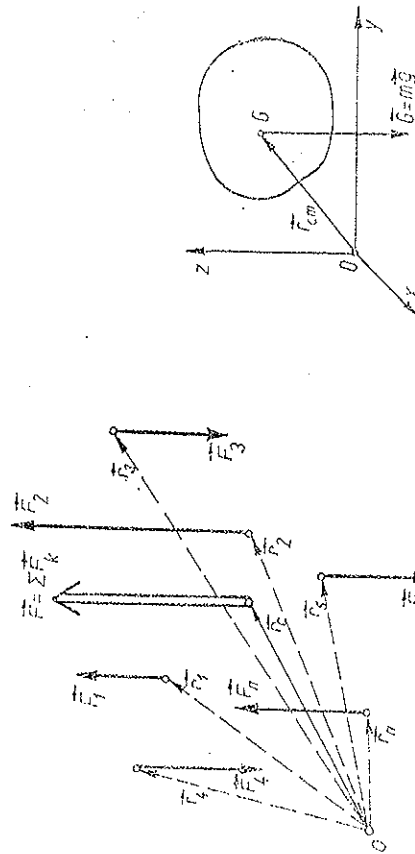


Fig. 7.13

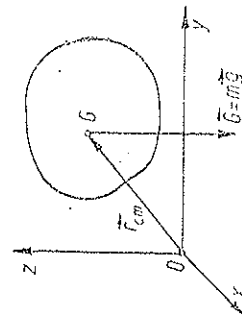


Fig. 7.14

ceea ce, în virtutea definiției (7.12), este în adevăr valabil pentru orice direcție \vec{n} a forțelor paralele.

În particular, forțele de greutate dau o rezultantă bine determinată \vec{G} care trece prin centrul de greutate (coincide cu centrul de masă) \vec{r}_{cm} , așa cum i-am definit (fig. 7.14). În adevăr, pentru orice orientare a lui \vec{g} , momentul

resultantei $m\vec{g}$ trebuie să fie egal cu momentul resultant al forțelor de greutate paralele elementare:

$$\vec{r}_{cm} \times m\vec{g} = \int \vec{r} \times \vec{g} \, dm \text{ sau } (m\vec{r}_{cm} - \int \vec{r} \, dm) \times \vec{g} = 0,$$

ceea ce este adevărat pentru orice orientare a lui \vec{g} , datorită definiției lui \vec{r}_{cm} .

7.6. CONDIȚIILE DE ECHILIBRU

Mișcarea rigidului se descompune în mișcarea de translație a centrului de masă sub acțiunea resultantei forțelor aplicate ($\vec{F} = m\vec{a}_{cm}$) și într-o mișcare de rotație în jurul unei axe trecând prin CM sub acțiunea momentului resultant ($\vec{M}_0 = d\vec{S}/dt$). Pentru a nu produce mișcarea de translație a centrului de masă, rezultanta tuturor forțelor trebuie să fie nulă. Pentru a nu produce rotația rigidului în jurul centrului de masă, momentul resultant al tuturor forțelor aplicate trebuie să fie nul:

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_s = 0, \quad \vec{M} = \sum \vec{M}_s = \sum \vec{r}_s \times \vec{F}_s = 0. \quad (7.13)$$

Observăm că deși rezultanta și momentul resultant al forțelor interne sînt totdeauna nule, totuși la corpurile deformabile sistemul forțelor interne nu este în general în echilibru!

Scrise pe componente într-un SC ortogonal (polul este în originea sistemului de coordonate), ecuațiile vectoriale (7.13) dau:

$$\begin{cases} F_x = \sum F_{sx} = 0, & M_x = \sum M_{sx} = \sum (y_s F_{sz} - z_s F_{sy}) = 0, \\ F_y = \sum F_{sy} = 0, & M_y = \sum M_{sy} = \sum (z_s F_{sx} - x_s F_{sz}) = 0, \\ F_z = \sum F_{sz} = 0, & M_z = \sum M_{sz} = \sum (x_s F_{sy} - y_s F_{sx}) = 0. \end{cases} \quad (7.14)$$

Momentele pot fi luate nu numai față de CM, ci față de orice punct, întrucît în virtutea primei condiții (resultantă nulă $\vec{F} = 0$) momentul resultant nu va depinde de alegerea polului.

Prin urmare, avem în general 6 condiții universale de echilibru pentru un solid rigid: 3 pentru forța resultantă și 3 pentru momentul resultant.

Pentru a scrie condițiile de echilibru, izolăm mintal rigidul de mediu său și reprezentăm toate forțele care acționează asupra sa din partea mediului său exterior, adică „eliberăm rigidul de legături” dar introducînd reacțiunile corespunzătoare ale legăturilor. Pentru rigidul „liber” astfel obținut, adică eliberat de legături dar supus la forțele de reacțiune ale legăturilor, scriem condițiile universale de echilibru.

În cazuri particulare, numărul condițiilor de echilibru se poate reduce. Astfel, dacă toate forțele sînt conținute într-un plan, avem 2 condiții pentru forța resultantă și 1 condiție pentru momentul resultant, deci în total 3 condiții.

Dacă forțele sînt *concurrente* în spațiu, avem iarăși numai 3 condiții pentru rezultantă, și dacă sînt *concurente* în plan — numai 2 condiții pentru rezultantă.

Dacă forțele sînt *paralele în spațiu*, avem 3 condiții: 1 pentru rezultantă și 2 pentru moment.

Exemplu. O scară uniformă este sprijinită de un perete. Cunoșcînd coeficienții de frecare cu podeaua μ_1 și cu peretele μ_2 , să se determine unghiul α dintre scară și podea în momentul limită cînd scara începe să lunece (fig. 7.15).

Rezolvare. Considerăm cazul limită, adică exact poziția cînd scara începe să lunece, atunci forțele de frecare devin cele arătate în fig. 7.15 ($F_f = \mu N$) și avem

$$\begin{aligned} N_2 - \mu_1 N_1 &= 0, \quad \mu_2 N_2 - G + N_1 = 0, \\ G \frac{1}{2} \cos \alpha - N_2 l \sin \alpha - \mu_2 N_2 l \cos \alpha &= 0 \end{aligned}$$

(forțele de frecare nu dau moment față de originea O), de unde rezultă:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1 - \mu_1 \mu_2}{2 \mu_1}$$

independent de masa și lungimea scării.

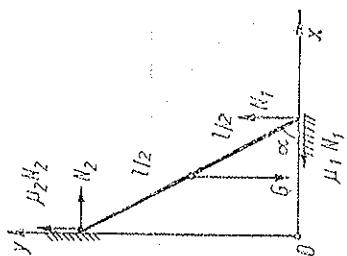


Fig. 7.15

7.7. REDUCEREA „FORTELOR DE INERTIE”

Să reducem la o rezultantă și un cuplu „forțele” $m_k \ddot{a}_k$. Deoarece rezultanta forțelor interne este nulă și momentul resultant al forțelor interne față de orice pol este nul, sistemul de forțe externe aplicate rigidului se reduce față de orice pol într-un SR *inercial exact* la aceeași rezultantă și același cuplu (moment) ca și „forțele” $m_k \ddot{a}_k$ (față de același pol).

În adevăr, să facem această reducere față de originea unui sistem de coordonate S cartezian ortogonal (nu neapărat inercial).

În virtutea definiției centrului de masă $\vec{r}_{cm} = \frac{1}{m} \int \vec{r} dm$, avem pentru rezultantă:

$$\int \ddot{a} dm = \left(\int \ddot{r} dm \right)'' = (m \ddot{r}_{cm})'' = m \ddot{a}_{cm}. \quad (7.15)$$

Dacă sistemul de coordonate S este *inercial*, atunci binomișul $m \ddot{a}_{cm} = \vec{F}$ — rezultanta forțelor externe aplicate rigidului.

Pentru momentul resultant vom face descompunerea față de CM:

$$\begin{aligned} \int \vec{r} \times \ddot{a} dm &= \int (\vec{r}_{cm} + \vec{r}') \times [\ddot{a}_{cm} + \ddot{\omega} \times \vec{r}' + \ddot{\omega} \times (\ddot{\omega} \times \vec{r}')] dm = \\ &= \vec{r}_{cm} \times m \ddot{a}_{cm} + \int \vec{r}' \times (\ddot{\omega} \times \vec{r}') dm + \ddot{\omega} \times \int \vec{r}' \times (\ddot{\omega} \times \vec{r}') dm, \end{aligned} \quad (7.16)$$

unde ceilalți termeni s-au anulat din cauză că $\int \vec{r}' dm = m \vec{r}_{cm} \equiv 0$ și am folosit faptul că $\vec{r}' \times [\ddot{\omega} \times (\ddot{\omega} \times \vec{r}')] \equiv \ddot{\omega} \times [\vec{r}' \times (\ddot{\omega} \times \vec{r}')]'$, ceea ce se verifică imediat prin dezvoltarea dublilor produse vectoriale din parantezele mari.

Reamintindu-ne de calculul analitic făcut la momentul cinetic, putem scrie

$$\int \vec{r}' \times (\ddot{\omega} \times \vec{r}') dm = \dot{I} \ddot{\omega}, \quad \int \vec{r}' \times (\ddot{\omega} \times \vec{r}') dm = \dot{I} \ddot{\omega}, \quad (7.17)$$

unde \dot{I} este matricea momentelor de inerție față de un sistem de coordonate S' cu originea în CM (acest S' în rest poate fi arbitrar, de exemplu, SC propriu al rigidului cu originea în CM, însă cu $\ddot{\omega}$ și $\ddot{\omega}$ calculați în sistemul de coordonate inițial S). Prin urmare,

$$\int \vec{r} \times \ddot{a} dm = \vec{r}_{cm} \times m \ddot{a}_{cm} + \dot{I} \ddot{\omega} + \ddot{\omega} \times (\dot{I} \ddot{\omega}); \quad (7.18)$$

primul termen dă momentul rezultantei (7.15) aplicate în CM (este partea orbitală sau externă), iar ceilalți doi termeni dau momentul față de CM (partea proprie sau internă).

Dacă sistemul de coordonate S este *inercial*, atunci momentul

$$\int \vec{r} \times \ddot{a} dm = \vec{M}' - \text{momentul forțelor externe aplicate rigidului.}$$

Descompunîndu-l pe \vec{M}' față de CM:

$$\begin{aligned} \vec{M}' &= \sum \vec{r}_s \times \vec{F}_s = \sum (\vec{r}_{cm} + \vec{r}') \times \vec{F}_s = \\ &= \vec{r}_{cm} \times \sum \vec{F}_s + \sum \vec{r}' \times \vec{F}_s = \vec{r}_{cm} \times \vec{F} + \vec{M}', \end{aligned}$$

și ținînd seama că $m \ddot{a}_{cm} = \vec{F}$, rezultă față de CM:

$$\vec{M}' = \dot{I} \ddot{\omega} + \ddot{\omega} \times (\dot{I} \ddot{\omega}) \text{ față de CM.} \quad (7.19)$$

Am regăsit astfel rezultatele cunoscute.

Observație. Dacă pe lângă forțele externe reale aplicate rigidului, reprezentăm și „forțele de inerție” ($-m_k \ddot{a}_k$), reduce la o rezultantă și un cuplu față de un pol ales convenabil, atunci rigidul apare în „echilibru” sub acțiunea tuturor acestor forțe și putem scrie condițiile de echilibru pentru ansamblul acestor forțe (*metoda cinetostatică*).

7.8. TEOREMELE LUI GULDIN ȘI PAPPUS

I. Aria suprafeței generate prin rotirea unui arc de curbă plană în jurul unei axe situată în planul acestui arc de curbă și neintersec-tîndu-l, este egală cu produsul dintre lungimea arcului de curbă și lungimea cercului descris de centrul de masă al arcului de curbă.

II. Volumul corpului generat prin rotația unei figuri plane în jurul unei axe, situată în planul figuri și neintersectând-o, este egal cu produsul dintre aria figuri și lungimea cercului descris de centrul de masă al figuri. Teoremele au fost descoperite în sec. III de matematicianul și mecanicianul grec Pappus din Alexandria. În sec. XVII P. Guldin le-a „descoperit” în volumul VII al operelor lui Pappus.

Demonstrație. a) Aria se obține prin însumarea (integrarea) ariilor laterale ale trunchiurilor de con elementare (aria laterală a unui trunchi de con este $\pi G(r+R)$) (fig. 7.16):

$$S = \int 2\pi y ds, \text{ dar } y_{cm} = \frac{1}{l} \int y ds,$$

de unde în adevăr

$$S = 2\pi y_{cm} l.$$

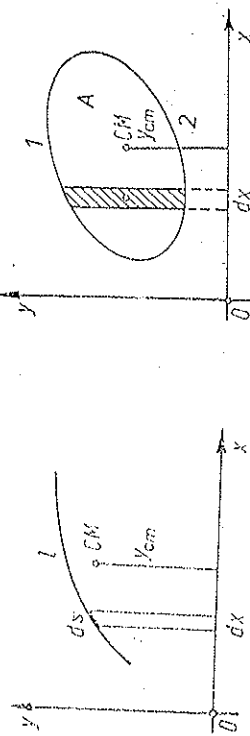


Fig. 7.16

Fig. 7.17

b) Analog, sumând volumele trunchiurilor de con elementare $\left(V = \frac{\pi}{3} h(r^2 + R^2 + rR) \right)$ (fig. 7.17):

$$V = \int_0^l \pi y^2 dx = \int_0^l \pi y^2 dx = \pi \int_0^l (y_1^2 - y_2^2) dx,$$

dar

$$y_{cm} = \frac{1}{A} \int (y_1 - y_2) dx \cdot \frac{1}{2} (y_1 + y_2) = \frac{1}{A} \int \frac{1}{2} (y_1^2 - y_2^2) dx,$$

de unde în adevăr

$$V = 2\pi y_{cm} A.$$

Exemple. a) Să se calculeze aria și volumul unui tor de rază r . *Rezolvare.* Aplicând teoremele Guldin-Pappus:

$$S = 2\pi r \cdot 2\pi R = 4\pi^2 r R, \quad V = \pi r^2 \cdot 2\pi R = 2\pi^2 r^2 R.$$

b) Să se afle volumul corpului generat prin rotația unui triunghi dreptunghic cu catetele a, b , în jurul ipotenuzei.

Rezolvare.
$$V = \frac{ab}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{h}{3} = \frac{\pi}{3} \frac{a^2 b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

PROBLEME

1. Să se afle locul geometric al extremităților vectorilor-forță aplicate într-un punct dat A , care dau același moment \vec{M} față de un pol dat O .

R. Dreaptă paralelă la AO situată în planul perpendicular pe \vec{M} , la distanța M/AO de dreapta AO .

2. Asupra unui rigid lucrează forțele situate în plan și reprezentate prin poligonul forțelor din fig. 7.18. Să se reducă acest sistem la originea primului vector.

R. Rezultanta este linia de închidere AF a conturului poligonal, iar momentul este egal în modul cu dublul ariei poligonului $ABCE$ și este perpendicular pe plan.

3. Să se afle locul geometric al extremităților vectorului moment al rezultantei unui sistem de forțe în plan, calculat în raport cu toate punctele acestui plan.

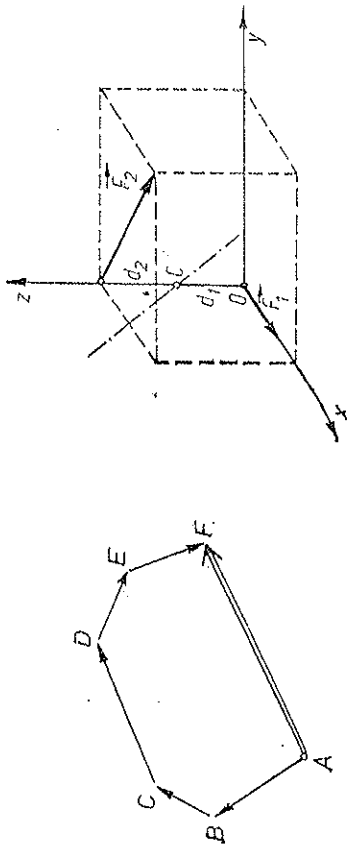


Fig. 7.18

Fig. 7.19

R. Un plan care taie planul forțelor după axa centrală.

4. Să se arate că momentul resultant în raport cu o axă este proiecția pe acea axă a momentului resultant calculat în raport cu un punct *arbitrar* de pe axă.

5. Un sistem de forțe poate fi redus, după cum știm, la două forțe, ca de exemplu în fig. 7.19. Să se arate că axa centrală intersectează normal perpendiculara comună a celor două forțe la distanțele

$$d_{1,2} = (F_{2,1}^2 + \vec{F}_1 \vec{F}_2) : (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)^2 \text{ pînă la forțe.}$$

6. Peste un semicilindru fix de rază R , așezat orizontal, se sprijină transversal o tijă uniformă de lungime l , ca în fig. 7.20. Coeficientul de frecare la alunecare dintre tijă și cilindru este μ , iar dintre tijă și plan μ_2 . Să se calculeze $\text{ctg } \alpha_{\text{max}}$ la echilibru.

$$\text{R. } \text{ctg } \alpha_{\text{max}} = \frac{l}{4R\mu_2} \cdot \left[\mu_2 - \mu_1 + \sqrt{(\mu_2 - \mu_1)^2 + \frac{8R}{l} \mu_2 \left(1 + \mu_1 \mu_2 - 2\mu_2 \frac{R}{l} \right)} \right].$$

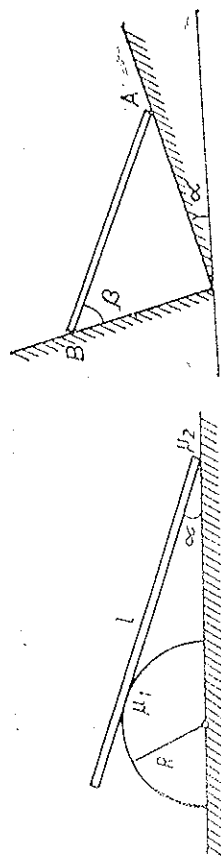


Fig. 7.20

Fig. 7.21

7. O bară omogenă AB de greutate G se sprijină pe două plane perpendiculare între ele ca în fig. 7.21. Cît de mare este unghiul β în poziția de echilibru, dacă unghiul de frecare al barei cu planele este φ ?

R.

$$\alpha - 2\varphi \leq \beta \leq \alpha + 2\varphi.$$

8. Un punct material greu se poate deplasa cu frecare pe un cerc de rază R așezat într-un plan vertical. La ce înălțimi față de centrul cercului poate fi în echilibru punctul material, dacă unghiul de frecare este φ ?

R. $h \leq -R \sin \varphi$ și $h \geq R \sin \varphi$.

9. Un cilindru circular drept este menținut în echilibru pe un plan înclinat cu ajutorul unui fir înfășurat pe cilindru și tras paralel cu planul ca în fig. 7.22. Să se afle condiția de

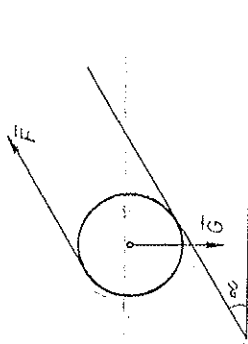


Fig. 7.22

echilibru și forța cu care trebuie să tragem de fir, știind unghiul α al planului, coeficientul de frecare la alunecare μ și greutatea cilindruului G .

R. $\operatorname{tg} \alpha \leq 2\mu$, $F = \frac{1}{2} G \sin \alpha$.

10. O pînie conică cu deschiderea 2α se rotește cu viteza unghiulară ω în jurul axei sale verticale. Între ce înălțimi $h_{1,2}$ poate sta pe suprafața pîniei un corp mic fără să alunece, știindu-se unghiul de frecare φ ?

R. $h_1 = \frac{g}{\omega^2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} (\alpha + \varphi)}$ și $h_2 = \frac{g}{\omega^2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} (\alpha - \varphi)}$ dacă $\varphi < \alpha$.

11. O placă omogenă triunghiulară de greutate G stă orizontal sprijinindu-se cu vîrțile sale pe trei reazeme. Să se afle reacțiunile reazemelor.

R. $G/3$.

12. Să se afle cu ajutorul teoremei Guldin suprafața, respectiv volumul, corpului obținut prin rotirea unui arc de cerc, respectiv segment de cerc, cu unghiul la centru 2α și rază R , în jurul coardei sale.

R. $S = 4\pi R^2 (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)$, $V = 2\pi R^3 \left(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha - \frac{1}{3} \sin^3 \alpha \right)$.

CAPITOLUL 8 GRAVITAȚIA

Legea atracției universale a fost descoperită de Isaac Newton și publicată în cartea sa „Principiile matematice ale filozofiei naturale”, unde este aplicată la mișcarea sistemului solar.

8.1. LEGILE LUI KEPLER

Pe baza observațiilor astronomice de mare precizie ale lui Tycho Brahe (1546—1601), după calcule de aproape două decenii, *Johann Kepler* (1571—1630) a stabilit următoarele trei legi de mișcare a planetelor în jurul Soarelui (primele două în 1609, a treia în 1619):

- I. *Planetele se mișcă în jurul Soarelui pe traiectorii eliptice, Soarele aflându-se în unul din focarele elipsei.*
- II. *Legea ariilor. Razele vectoare, duse de la Soare la planetă, mătură arii egale în timpuri egale, adică viteza areolară sau sectorială este constantă (fig. 8.1).*
- III. *Pătratele timpurilor de revoluție a planetelor în jurul Soarelui sînt proporționale cu cuburile semiaxelor mari ale elipselor:*

$$T^2 = \text{const} \cdot a^3. \quad (8.1)$$

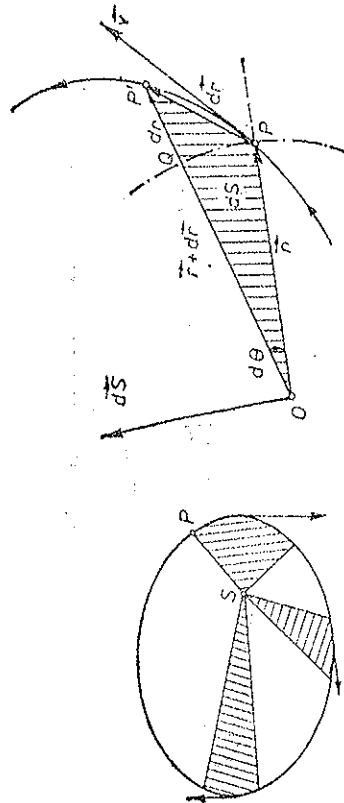


Fig. 8.1

Știind că aria unui triunghi este egală cu jumătate din produsul a două laturi prin sinusul unghiului cuprins, să calculăm aria elementară dS măturată de raza vectoare în timpul dt (fig. 8.2):

$$\Delta S \cong \frac{1}{2} r(r + \Delta r) \sin \Delta \theta,$$

de unde la limită (a nu se confunda $d\mathbf{r} = QP'$ cu $|d\mathbf{r}| = PP')$:

$$dS = \frac{1}{2} r^2 d\theta \quad \text{sau} \quad dS = \frac{1}{2} |\mathbf{r}| |d\mathbf{r}| \sin(\mathbf{r}, d\mathbf{r}). \quad (8.2)$$

Ultima expresie ne arată că aria elementară se poate reprezenta printr-un vector perpendicular pe arie:

$$d\vec{S} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times d\mathbf{r}. \quad (8.3)$$

Viteza areolară este prin definiție variația ariei măturată de raza vector a mobilului, raportată la unitatea de timp:

$$\vec{\Omega} \equiv \frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \vec{v} = \frac{1}{2m} \mathbf{r} \times \vec{p} = \frac{1}{2m} \vec{L}, \quad (8.4)$$

de unde pentru mișcarea plană ($\vec{\Omega}$ și $d\vec{S}$ păstrează direcție fixă):

$$\Omega = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}, \quad L = 2m \Omega = m r^2 \dot{\theta} = I \dot{\theta}. \quad (8.5)$$

Legea a II-a a lui Kepler afirmă constanța vitezei areolare a planetelor față de Soare. Prima și a doua lege afirmă constanța vectorului vitezei areolară $\vec{\Omega}$ sau a *vectorului moment cinetic* \vec{L} al planetei față de Soare. Vom prefera să folosim momentul cinetic, care este o noțiune mai profundă decât viteza areolară (așa cum este impulsul față de viteză, datorită legilor de conservare).

3.2. LEGEA ATRACȚIEI UNIVERSALE

Din legile lui Kepler, pe baza legii fundamentale a dinamicii, Newton a dedus legea atracției universale (1687).

Să considerăm pentru simplificare o traiectorie *circulară* (elipsa reală a planetelor diferă puțin de un cerc). Atunci din legea a doua a lui Kepler (8.5) rezultă că planeta se mișcă cu vitezele unghiulare ($\dot{\theta} = \dot{\omega}$) și liniară ($v = \dot{\theta} R$) constante pe cerc, deci este supusă la o forță centripetă, egală cu masa ori accelerația centripetă:

$$F = m \frac{v^2}{R} = m \omega^2 R = 4\pi^2 m \frac{R}{T^2}. \quad (8.6)$$

Conform legii a III-a a lui Kepler: $T^2 = k R^3$ ($k = \text{const}$), deci (8.6), devine

$$F = \frac{4\pi^2 m}{k} \frac{m}{R^2} \sim \frac{m}{R^2}, \quad (8.7)$$

unde constanta k este aceeași pentru toate planetele. Prin urmare, forța de atracție exercitată de Soare asupra planetei este direct proporțională cu masa planetei și invers proporțională cu pătratul distanței dintre planetă și Soare. Conform principiului III al acțiunii și reacțiunii, o forță egală în modul și de sens opus se exercită asupra Soarelui din partea planetei, deci trebuie să fie proporțională cu masa Soarelui. Aceleași legi ale lui Kepler guvernează și mișcarea sateliților planetelor, de exemplu, sateliții lui Jupiter și Saturn. Introducând o nouă constantă, astfel ca să apară masa astrului central, obținem *legea atracției universale* a lui Newton:

$$F = -\gamma \frac{mM}{R^2} \quad \text{sau} \quad F = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (\gamma = \text{const}). \quad (8.8)$$

unde semnul minus indică caracterul atractiv al forței.

Două corpuri punctiforme se atrag între ele cu o forță direct proporțională cu produsul maselor lor și invers proporțională cu pătratul distanței dintre ele.

Constanta gravitațională γ are dimensiunile:

$$[\gamma] = \frac{[F][R^2]}{[m]^2} = L^3 M^{-1} T^{-2} = \text{m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2 = \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \text{ în SI}. \quad (8.9)$$

După ultimele măsurări experimentale:

$$\gamma = 6,670 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2. \quad (8.10)$$

Două mase punctiforme egale fiecare cu unitatea (1 kg), situate la distanța unitate (1 m) se atrag cu o forță egală numeric cu constanta gravitațională ($6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N}$).

În cazul a două mase oarecare, forța de atracție este rezultanta *vectorială* a forțelor de atracție dintre particulele care compun corpurile.

Reciproc, din legea atracției universale, pentru orbite planetare circulare, rezultă ușor celelalte două legi ale lui Kepler:

$$F = -\gamma \frac{mM}{R^2} = -m\omega^2 R \rightarrow \omega = \dot{\theta} = \text{const} \quad (R = \text{const}), \quad \Omega = \text{const},$$

$$\omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \gamma \frac{M}{R^3}, \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma M} R^3 = k R^3. \quad (8.11)$$

Forțele gravitaționale devin importante numai dacă unul din partenerii este de dimensiuni astronomice (piatră—Pământ) sau între corpuri cerești.

Observație. Trecerea de la observațiile empirice ale lui Tycho Brahe la legile lui Kepler și apoi la legea atracției universale (și mai apoi la teoria relativistă a gravitației) reflectă dezvoltarea *etatei* a cunoașterii.

Succesiunea *istorică* a cunoașterii luată în momentele sale principale, curățată de exterior și accidental, trebuie să reflecte succesiunea *logică* a cunoașterii. Ea corespunde trecerii de la singular prin particular la general, corespunde înaintării cunoașterii de la fenomen la esență, de la esența de ordinul I la esența de ordinul II ș.a.m.d. în profunzime.

Este foarte important și util să culegi informații asupra obiectului prin experiment, să construiești grafice și tabele de constante privind comportarea și proprietățile obiectului. Dar o simplă colecție de date, oricât de complexă și bogată ar fi ea, nu este încă știință. Pentru procesul cunoașterii este mult mai important *de a ridica datele empirice la forma generală de determinări cantitative pe planul necesității și generalității, ca momente ale unei legi*. Mai mult, *înseși legile trebuie demonstrate*, deduse din calități sau din concepte primare cum sînt spațiul și timpul. Calitatea trebuie să treacă în cantitate, care nu este altceva decît calitatea depășită.

Experiența pune întrebarea: cum? și este descriptivă. Teoria pune întrebarea *de ce?* și este demonstrativă. Teoria trebuie să arate necesitatea legilor ei și să le deducă, deoarece sarcina unei teorii este de a demonstra existența și determinarea obiectelor ei.

Iată ce spune Hegel (Știința logicii, Ed. Acad. R.S.R., București, 1966, pag. 329):

„Este un mare merit să cunoști numerele empirice ale naturii, de exemplu distanțele dintre planete; dar este un merit nemărginit mai mare să faci să dispară cîțimile empirice, ridicându-le la o *formă generală* de determinări cantitative, astfel încît ele să devină momente ale unei *legi* sau măsuri: merite nemuritoare și-au cîștigat, de exemplu, *Galilei* cu privire la cădere și *Kepler* cu privire la mișcarea corpurilor cerești. Aceștia au *demonstrat* legile descoperite de ei, arătînd că acestora le corespunde întregul cuprins al particularităților furnizate de percepție. Trebuie însă să cerem o *demonstrație* și mai înaltă a acestor legi pentru ca determinările lor cantitative să fie cunoscute din calitățile sau conceptele determinate la care ele se referă (cum sînt timpul și spațiul)”.
Înțelegerea depășită, în esență, a legilor Kepler, poate fi atinsă numai pe baza cunoașterii legii mai profunde a atracției universale și a acesteia pe baza teoriei relativiste a gravitației (Einstein) și așa mai departe. Numai cunoscînd structurile mai complexe, superioare, putem înțelege deplin, în esență, structurile simple, inferioare (de exemplu, în biologie, cunoscînd organismul uman, putem înțelege mai bine organismul mîmurei și al altor animale, și nu invers).

Nu ne putem opri la formularea legii atracției universale, trebuie să o deducem din concepte mai profunde (de exemplu, legea $1/r^2$ a forței și caracterul tridimensional al spațiului etc.).

8.3. MĂSURAREA CONSTANTEI GRAVITAȚIONALE

Pentru prima dată constanta γ a fost determinată experimental de *Cavendish* în 1798 cu ajutorul unei balanțe de torsune (fig. 8.3). Două sfere de plumb grele M (158 kg) sînt suspendate pe o bară care se poate roti. Alte două bile mici de plumb m (0,73 kg) sînt fixate la capetele unei tije suspendate pe un fir elastic. Apropiind sferele M de bilele m , se constată o răsucire a firului lor de suspensie. La echilibru, momentul forțelor elastice $C\alpha$ este egal cu momentul forțelor de atracție F :

$$C\alpha = Fl = \gamma \frac{mM}{r^2} l, \quad \gamma = \frac{r^2 C\alpha}{mMl} \quad (8.12)$$

Cunoscînd M , m , l , C și măsurînd distanța r și unghiul de răsucire α , se poate calcula γ .

O altă metodă mai precisă este ilustrată de fig. 8.4 (Richartz 1898, după o idee a lui Jolly). Cele două bile sînt în prealabil echilibrate pe o balanță, apoi așezate ca în figură. Echilibrul se strică, deoarece bila superioară este atrasă în jos de masa de plumb (100 t), iar bila inferioară în sus (influența câmpului gravitațional terestru a fost eliminată prin echilibrarea inițială).

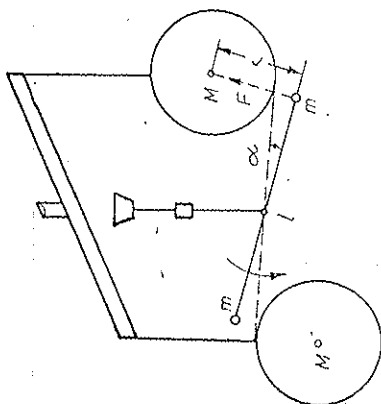


Fig. 8.3

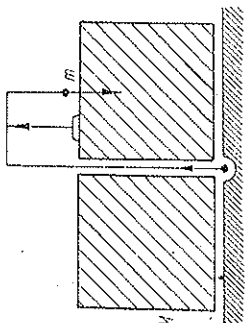


Fig. 8.4

Observație. După publicarea legii atracției universale (1687) a trebuit să treacă *peste un secol* pentru ca să se măsoare experimental constanta atracției universale (Cavendish 1798) și apoi *încă un secol* pentru ca să o măsoare Richartz în 1898. Astăzi trec doar cîțiva ani sau chiar luni de la publicarea unor descoperiri și aplicarea lor în fizică sau tehnologie.

În adinea antichitate preistorică puteau trece *milenii* fără să se descopere practic nimic. Civilizațiile antice, de exemplu sumero-akkadiene, egipteană, chineză, indiană, au necesitat mii de ani pentru a ajunge la gradul lor de dezvoltare cunoscut. Înflorirea civilizației Greciei antice a cuprins cîteva sute de ani. În sfîșit, epoca Renașterii marchează o dezvoltare impetuoasă a științei, artei și forțelor de producție.

Putem spune că dezvoltarea științei și tehnologiei în general urmează o lege (curbă) *exponențială* (dublare la intervale egale de timp).

8.4. PROBLEMA A DOUĂ CORPURI

Cunoscînd legea interacțiunii dintre două particule de mase m_1, m_2 și condițiile inițiale (pozițiile și vitezele lor la un moment dat), să se afle mișcarea celor două particule.

În raport cu un referențial inertial, cele două corpuri interacționează, conform principiului reciproității forțelor, cu forțele \vec{F} , $-\vec{F}$, de atracție sau de respingere (fig. 8.5):

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}, \quad m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -\vec{F}, \quad (8.13)$$

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = 0, \quad m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \text{const.} \quad (8.14)$$

Ultima ecuație reprezintă conservarea impulsului total al sistemului din cele două particule, presupus izolat. Vectorul de poziție \vec{r}_{cm} și viteza \vec{v}_{cm} ale centrului de masă sînt:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \vec{v}_{cm} = \dot{\vec{r}}_{cm} = \frac{m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2}{m_1 + m_2}. \quad (8.15)$$

În virtutea lui (8.14) rezultă $\vec{v}_{cm} = \text{const}$, adică centrul de masă (CM) al celor două particule este în repaus sau se mișcă rectiliniu uniform, întrucât forțele interne (\vec{F} , $-\vec{F}$) nu pot influența mișcarea centrului de masă. Problema s-a redus astfel la mișcarea celor două particule față de centrul lor de masă, care se mișcă rectiliniu uniform, adică față de SCM.

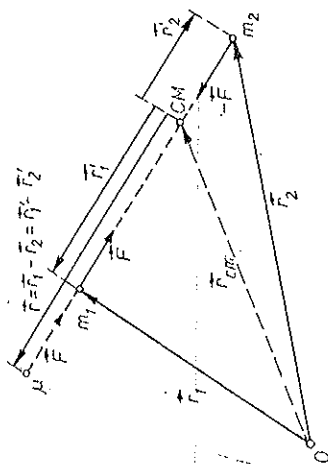


Fig. 8.5

Introducem poziția, viteza și accelerația, relative, ale particulei m_1 față de particula m_2 considerând un SC cu originea în m_2 și în *translație* față de SL:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \quad \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_1 - \dot{\vec{r}}_2 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2, \quad \vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 \quad (8.16)$$

(în expresia vitezei relative și a accelerației relative am ținut seama de mișcarea prin *translație* a SC legat de m_2 , altfel ar apărea termeni suplimentari, de exemplu accelerația Coriolis). Atunci,

$$m_2 m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = m_2 \vec{F}, \quad m_1 m_2 \ddot{\vec{v}}_2 = -m_1 \vec{F},$$

$$m_1 m_2 (\ddot{\vec{v}}_1 - \ddot{\vec{v}}_2) = (m_1 + m_2) \vec{F},$$

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}} = \vec{F} \quad \text{sau} \quad \mu \ddot{\vec{r}} = \mu \vec{v} = \mu \dot{\vec{r}} = \vec{F}, \quad (8.17)$$

unde $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ este *masa redusă* a celor două particule. Prin urmare, în SC legat de m_2 și mișcat prin *translație* față de SL, mișcarea este descrisă de vectorul relativ $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ al unei particule *fictive de masă redusă* μ supusă la forța \vec{F} trecând prin m_2 . Problema s-a redus la mișcarea unei particule în *câmp central*, adică într-un câmp de forțe care trec permanent printr-un punct dat — centrul forțelor (în cazul nostru prin m_2 = originea SC considerat).

Putem foarte bine considera mișcarea particulei μ în SCM, cu vectorul de poziție \vec{r} și legea forței \vec{F} (fig. 8.5).

Cunoscând $\vec{r} = \vec{r}(t)$, obținem imediat mișcarea fiecărei particule față de centrul de masă:

$$0 = m_1 \ddot{\vec{r}}_{cm} = m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2, \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2,$$

de unde

$$\vec{r}'_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \quad \vec{r}'_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}, \quad (8.18)$$

adică $\vec{r}'_{1,2}$ sînt proporționale cu $\vec{r}(t)$, deci *traectoria fiecărei particule față de CM este asemenea cu traiectoria particulei fictive μ față de m_2 . Traectoriile celor două particule față de CM sînt asemenea și între ele, dar particulele sînt situate mereu diametral opus față de CM* (fig. 8.6).

Dacă $m_2 \gg m_1$, atunci

$$\mu = \frac{m_1}{1 + m_1/m_2} \approx m_1, \quad \vec{r}_{cm} \approx \vec{r}_2, \quad (8.19)$$

adică într-o primă aproximație centrul de masă coincide cu m_2 (Soarele) în jurul căreia are loc mișcarea particulei $\mu \approx m_1$ (planetă), supusă la o forță de atracție (sau respingere) exercitată de m_2 .

În raport cu SCM, *ambele* corpuri se mișcă în jurul CM comun, descriind traectorii *asemenea*, conform lui (8.18) (fig. 8.6).

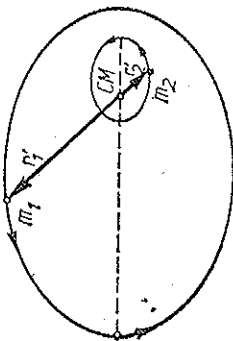


Fig. 8.6

8.5. MIȘCAREA ÎN CÂMP CENTRAL

8.5.1. VITEZA ȘI ACCELERAȚIA

Fie o mișcare *plană*. Alegînd un SC polare în plan (fig. 8.7), viteza se poate descompune într-o componentă radială v_r și o componentă transversală v_θ (perpendiculară pe raza vectoroare):

$$d\vec{r} = \vec{i} dr + \vec{j} r d\theta, \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{i} \frac{dr}{dt} + \vec{j} r \frac{d\theta}{dt}, \quad (8.20)$$

$$\vec{v} = v_r \vec{i} + v_\theta \vec{j}, \quad v_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r}, \quad v_\theta = r \frac{d\theta}{dt} = r \dot{\theta},$$

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{i} + r \dot{\theta} \vec{j}. \quad (8.21)$$

Derivatele vectorilor sînt, conform figurii 8.7 (derivata unui vector este totdeauna perpendiculară pe vector, diferențiala unui vector fiind egală în modul cu unghiul de rotație a vectorului: $|d\vec{i}| = d\theta = |\dot{d}\vec{j}|$):

$$\dot{\vec{i}} = \dot{\theta} \vec{j}, \quad \dot{\vec{j}} = -\dot{\theta} \vec{i} \quad (8.22)$$

(caz particular al formulor lui Poisson cu $\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{k}$, $\vec{k} = \text{const}$), astfel încât accelerația este:

$$\begin{aligned}\vec{v} = \vec{a} &= \ddot{r} \vec{i} + \dot{r} \dot{\theta} \vec{j} + r \ddot{\theta} \vec{j} + r \dot{\theta} \dot{\vec{j}} = \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{i} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \vec{j} = a_r \vec{i} + a_\theta \vec{j},\end{aligned}\quad (8.23)$$

unde a_r este accelerația radială și a_θ accelerația transversală.

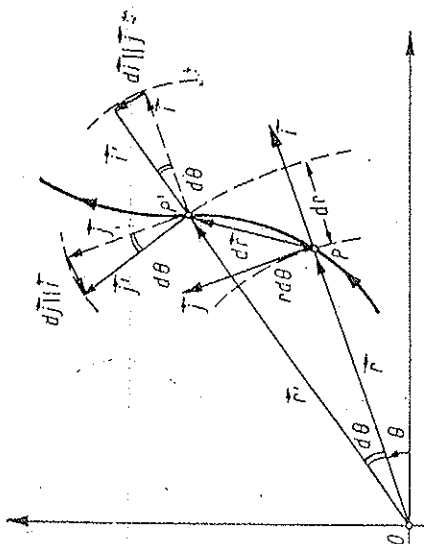


Fig. 8.7

Observăm că accelerația transversală a_θ poate fi scrisă astfel:

$$a_\theta = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = \frac{1}{r} (r^2 \dot{\theta})' = \frac{2}{r} \dot{\Omega}. \quad (8.24)$$

Legea fundamentală a dinamicii se scrie pe componente:

$$\begin{aligned}m\vec{a} = \vec{F} &\rightarrow ma_r = F_r, \quad ma_\theta = F_\theta, \\ m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) &= F_r, \quad m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = F_\theta.\end{aligned}\quad (8.25)$$

8.5.2. INTEGRALA MOMENTULUI CINETIC

În cazul câmpului *central* de forțe alegem polul în centrul forțelor, atunci $F_\theta = 0$, $F_r = F$, deci și accelerația este centrală, adică $a_\theta = 0$. Aceasta rezultă și din conservarea momentului cinetic față de centrul forțelor. În adevăr,

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v} = 0 \rightarrow \vec{L} = \text{const} = \vec{r} \times \vec{p} = 2m \vec{\Omega},$$

$$L = 2m\Omega = mr^2 \dot{\theta} = \text{const} \quad (\text{integrala momentului cinetic sau a ariilor}) \quad (I)$$

(8.26)

adică mișcarea este plană și viteza areolară este constantă (legea a doua a lui Kepler);

$$\dot{\Omega} = r\dot{\theta} + \frac{1}{2} r^2 \ddot{\theta} = \frac{1}{2} r a_\theta = 0 \text{ sau}$$

$$\dot{L} = m r (\dot{r} \dot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) = m r a_\theta = 0 \rightarrow a_\theta = 0. \quad (8.27)$$

Observăm că accelerația se poate pune sub următoarea formă:

$$a = a_r = - \frac{L^2}{m^2 r^3} \left(\frac{1}{r} + \frac{d^2(1/r)}{d\theta^2} \right), \quad (\text{J. Binet}). \quad (8.28)$$

8.5.3. INTEGRALA ENERGIEI

Ecuatiile mișcării se reduc la ecuația:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F \text{ sau } m\ddot{r} = F + F', \quad (8.29)$$

unde F' este forța centrifugă:

$$F' = m r \dot{\theta}^2 = \frac{L^2}{m r^3} = - \frac{d}{dr} \left(\frac{L^2}{2m r^2} \right) = - \frac{dU'}{dr}, \quad U' = \frac{L^2}{2m r^2}, \quad (8.30)$$

unde $U' = L^2/2m r^2$ este energia (potențială) centrifugă. Introducând forța $F'(r)$ și energia potențială corespunzătoare $U'(r)$, problema se reduce la o problemă *unidimensională* în raport cu r (partea radială a mișcării, în care se reflectă partea unghiulară a mișcării prin forța centrifugă F'), dacă forța F este funcție numai de r .

Energia cinetică este, conform lui (8.29) și (8.26):

$$\begin{aligned}E_c &= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) = \\ &= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2m r^2} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + U'.\end{aligned}\quad (8.31)$$

Înmulțind ecuația mișcării (8.29) cu dr sau aplicând direct teorema energiei cinetice, obținem:

$$dE_c = d \left(\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2m r^2} \right) = F dr = dW. \quad (8.32)$$

Să presupunem acum că forțele sînt *conservative*, atunci

$$\vec{F} d\vec{r} = F dr = -dU, \quad U(r) = - \int_{\infty}^r F dr,$$

$$d(E_c + U) = 0, \quad E_c + U = E = \text{const}, \quad (8.33)$$

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2m r^2} + U = E = \text{const} \quad (\text{integrala energiei}) \quad (II)$$

(8.34)

8.5.4. INTEGRAREA ECUAȚIILOR

Introducem derivata lui r în raport cu θ :

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{dr}{d\theta} \frac{L}{mr^2}, \quad d\theta = \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{\dot{r}}. \quad (8.35)$$

Atunci din (8.34-35) rezultă:

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m} (E - U) - \frac{L^2}{mr^2},$$

$$d\theta = \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{\dot{r}} = \frac{L}{r^2 \sqrt{2m(E - U) - \frac{L^2}{r^2}}} \frac{dr}{\dot{r}}.$$

$$d\left(\frac{L}{r}\right) = -\frac{L}{r^2} dr = -\frac{d(L/r)}{\sqrt{2m(E - U) - L^2/r^2}} = -\frac{d(L/r)}{\sqrt{2m(E - U - U')}}. \quad (8.36)$$

unde

$$U(r) = -\int_{\infty}^r F dr = \int_r^{\infty} F dr \quad (8.37)$$

este energia potențială în câmpul central de forțe.

8.6. PROBLEMA LUI KEPLER

Să presupunem că forțele sînt atractive și invers proporționale cu pătratul distanței. Acesta este cazul atracției gravitaționale sau al atracției electrostatice (legea lui Coulomb):

$$F = -\frac{\alpha}{r^2}, \quad (\alpha > 0), \quad U = \int_{\infty}^r F dr = \frac{\alpha}{r} \Big|_{\infty}^r = -\frac{\alpha}{r}. \quad (8.38)$$

În cazul gravitațional $\alpha = \gamma mM$, iar în cazul electrostatic $\alpha = -qQ/4\pi\epsilon_0$.

Conform § 8.4, problema celor două corpuri se reduce la problema mișcării unei particule de masă redusă μ în câmpul central (8.38), deci la problema unidimensională (partea „radială” a mișcării) cu energia potențială (fig. 8.8):

$$U + U' = -\frac{\alpha}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}. \quad (8.39)$$

Ecuatia (8.36) devine:

$$d\theta = -\frac{d\left(\frac{L}{r}\right)}{\sqrt{2\mu E + \frac{2\mu\alpha}{r} - \frac{L^2}{r^2}}} = -\frac{d\left(\frac{L}{r} - \frac{\mu\alpha}{L}\right)}{\sqrt{2\mu E + \frac{\mu^2\alpha^2}{L^2} - \left(\frac{L}{r} - \frac{\mu\alpha}{L}\right)^2}},$$

$$\theta = \arccos \frac{\frac{L}{r} - \frac{\mu\alpha}{L}}{\sqrt{2\mu E + \mu^2\alpha^2/L^2}} + \theta_0. \quad (8.40)$$

Alegînd originea de măsură a unghiului θ astfel încît constanta de integrare $\theta_0 = 0$ și introducînd notațiile

$$p = L^2/\mu\alpha, \quad e = \sqrt{1 + 2EL^2/\mu\alpha^2} = \sqrt{1 + 2Ep/\alpha}, \quad (8.41)$$

obținem ecuația traiectoriei în coordonate polare:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}. \quad (8.42)$$

Aceasta este ecuația unei conice (cu focarul în origine) cu parametrul $p = b^2/a$ și excentricitatea $e = c/a$. Dacă $e < 1$ avem elipsă, $e > 1$ hiperbolă, $e = 1$ parabolă. Pentru $\theta = 0$, r este minim (fig. 8.9). Pentru $\theta = \frac{\pi}{2}$, $r = p$.

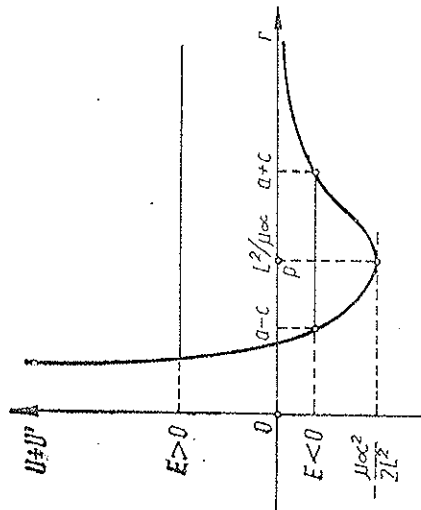


Fig. 8.8

Ecuatia conică (8.42) se obține direct din ecuația lui Binet (8.28):

$$\mu a_r = -\frac{L^2}{\mu r^2} \left(\frac{1}{r} + \frac{d^2(1/r)}{d\theta^2} \right) = F = -\frac{\alpha}{r^2}, \quad (8.43)$$

$$\frac{d^2(1/r)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = -\frac{\mu\alpha}{L^2}, \quad \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} - \frac{\mu\alpha}{L^2} \right) + \left(\frac{1}{r} - \frac{\mu\alpha}{L^2} \right) = 0.$$

Dar aceasta este o ecuație de tipul oscilatorului armonic ($y'' + a^2 y = 0$) și are soluția

$$\frac{1}{r} - \frac{\mu\alpha}{L^2} = A \cos(\theta - \theta_0).$$

Alegând $\theta_0 = 0$, $\theta = 0$ va corespunde la r minim și punând constanta A sub forma $A = e \frac{\mu\alpha}{L^2} = \frac{e}{L^2} p$ regăsim ecuația conicei (8.42).

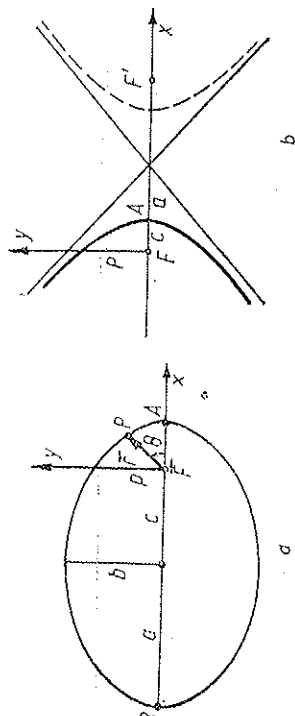


Fig. 8.9

a) Pentru $E < 0$ rezultă $e < 1$, deci traiectoria este *eliptică* și semiaxele sînt

$$p = \frac{b^2}{a}, \quad e = \frac{c}{a}, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad (8.44)$$

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = -\frac{\alpha}{2E}, \quad (E < 0), \quad b = \sqrt{ap} = \frac{L}{\sqrt{-2\mu E}}. \quad (8.45)$$

Cazul $E < 0$ (dar $E > E_{min} = -\mu\alpha^2/2L^2$) corespunde „stărilor legate” (în „groapa de potențial” a energiei potențiale $U + U'$ din fig. 8.8). Pentru mișcarea planetelor A este periheliu, B — afeliu. Semiaxa mare depinde numai de energie, pe cînd semiaxa mică depinde și de momentul cinetic.

Din (8.26) prin integrare pe o perioadă a rotației, obținem perioada T :

$$L = 2\mu\Omega = 2\mu \frac{dS}{dt}, \quad dt = \frac{2\mu}{L} dS,$$

$$T = \frac{2\mu}{L} S = \frac{2\mu \pi ab}{L} = \pi\alpha \sqrt{\frac{\mu}{-2E^3}}, \quad (8.46)$$

$$T^2 = -\frac{\pi^2 \alpha^2 \mu}{2E^3} = \frac{4\pi^2 \mu \alpha^3}{-2E^3} = \frac{4\pi^2}{\alpha} \frac{\mu \alpha^3}{-E^3}, \quad (8.47)$$

adică *pătratul perioadei de revoluție este proporțional cu cubul semiaxei mari a elipsei* (legea a III-a a lui Kepler).

b) Pentru $E > 0$, rezultă $e > 1$, deci traiectoria este hiperbolică și particula vine de la infinit cu viteză nenulă. Pentru $E = 0$, rezultă $e = 1$, traiectoria este parabolică și particula are la infinit viteză nulă.

Cazul $E \geq 0$ corespunde stărilor *neligate* (în cazul electrostatic al atomului — stărilor ionizate).

În cazul cîmpului *gravitațional*, traiectoriile eliptice corespund planetelor sau sateliților, iar traiectoriile hiperbolice corespund anumitor comete, care nu aparțin sistemului solar.

Am obținut mai înainte legile I și II ale lui Kepler (valabile pentru orice cîmp central). Ecuația (8.47) ne dă legea a III-a a lui Kepler:

$$\alpha = \gamma mM; \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma} \frac{1}{m+M} a^3 \approx \frac{4\pi^2}{\gamma} \frac{1}{M} a^3 = \text{const} \cdot a^3. \quad (8.48)$$

Prin urmare, legea a III-a a lui Kepler (8.1) nu este riguroasă (constanta depinde de masa planetei).

8.7. CÎMPUL GRAVITAȚIONAL ȘI POTENȚIALUL GRAVITAȚIONAL

Interacțiunea gravitațională a două corpuri se realizează prin intermediul *cîmpului gravitațional*. Fiecare corp „crează” în jurul său un cîmp gravitațional și de asemenea suferă acțiunea cîmpului gravitațional „creat” de alte corpuri. Cîmpul gravitațional reprezintă manifestarea unei stări deosebite a mediului sau a proprietăților deosebite ale spațiului și timpului.

8.7.1. CÎMPUL GRAVITAȚIONAL

Intensitatea cîmpului gravitațional se definește prin raportul dintre forța \vec{F} exercitată asupra unei particule punctiforme de „probă” și masa acesteia m :

$$\vec{\Gamma} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{F}}{m}, \quad \vec{F} = m\vec{\Gamma}. \quad (8.49)$$

Definiția este analogă cîmpului electrostatic ($\vec{E} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{F}/q$), m jucînd rolul sarcinii gravitaționale (masa gravitațională sau grea sau, încă, masa gravifică). Conform legii fundamentale a dinamicii $\vec{F} = m\vec{a}$, unde m este masa inertă, dar în virtutea egalității dintre masa inertă și masa grea, rezultă că o particulă m supusă numai cîmpului gravitațional $\vec{\Gamma}$ va căpăta o accelerație egală chiar cu $\vec{\Gamma}$, independentă de masa sa m , de natura substanței, de dimensiunile sau de forma sa:

$$\vec{F} = m\vec{\Gamma} = m\vec{a}, \quad \vec{a} = \vec{\Gamma}. \quad (8.50)$$

În particular rezultă de aici legea căderii corpurilor în vid ($\vec{\Gamma} = \vec{g}$).

Cîmpul creat de o masă punctiformă rezultă din legea atracției universale:

$$\vec{\Gamma} = -\gamma \frac{M}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad \Gamma = -\gamma \frac{M}{r^2}, \quad (8.51)$$

unde semnul minus indică caracterul *atractiv* al cîmpului.

Energia potențială a unei particule m în cîmpul gravitațional al particulei M este

$$dU = -\vec{F} d\vec{r}, \quad U = -\int_{\infty}^r \vec{F} d\vec{r} = -\gamma \frac{mM}{r}, \quad (8.52)$$

cîmpul gravitațional este deci un cîmp *conservativ*. Această energie este în același timp și energia potențială a celeilalte particule M în cîmpul lui m , deci este energia de *interacțiune* a celor două particule: proporțională cu produsul maselor lor și invers proporțională cu *distanța* dintre ele.

8.7.2. POTENȚIALUL GRAVITAȚIONAL

Potențialul cîmpului se definește prin energia potențială a particulei de probă raportată la masa acesteia sau altfel prin lucrul mecanic efectuat de forțele cîmpului pentru a deplasa particula m la infinit, împărțit la masa acesteia.

În cazul unei mase *punctiforme* M :

$$dV \stackrel{\text{def}}{=} -\vec{\Gamma} d\vec{r}, \quad V = -\gamma \frac{M}{r} = -\gamma \frac{M}{r}, \quad U = mV \quad (8.53)$$

(diferența de potențial între două puncte este minus „lucrul mecanic” al cîmpului între aceste puncte). Liniiile de cîmp în cazul (8.53) sînt radiale, iar suprafețele echipotențiale sînt sferice (fig. 8.10) (liniile de cîmp totdeauna se termină pe particule).

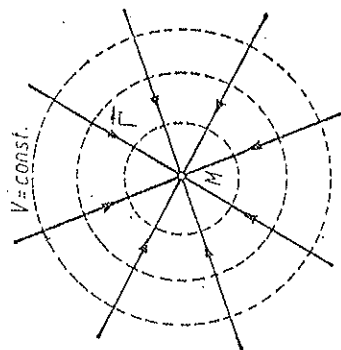


Fig. 8.10

8.7.3. ENERGIA DE INTERACȚIUNE

Energia de interacțiune a două particule m_1, m_2 se scrie acum:

$$U = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r} = \frac{1}{2} m_1 \left(-\gamma \frac{m_2}{r} \right) + \frac{1}{2} m_2 \left(-\gamma \frac{m_1}{r} \right) = \frac{1}{2} m_1 V_1 + \frac{1}{2} m_2 V_2$$

(unde V_1 este potențialul gravitațional în punctul m_1) și pentru un sistem de particule:

$$U = \frac{1}{2} \sum_k m_k V_k \quad (8.54)$$

(unde V_k este potențialul gravitațional în punctul m_k) sau în cazul distribuției continue a masei:

$$U = \frac{1}{2} \int V dm. \quad (8.55)$$

Energia de interacțiune a unui sistem de particule, luată cu semn schimbat, reprezintă *energia de legătură* a sistemului, adică energia necesară pentru a desface sistemul în particulele componente, îndepărtate la infinit sau altfel, este lucrul mecanic care trebuie efectuat împotriva forțelor de coeziune pentru a desface sistemul, sau, în sfîrșit, este energia degajată la formarea sistemului din particule libere aduse de la infinit. (Particulele libere nu pot forma o stare legată, decât dacă se elimină energia.) *Exemple*: energia de legătură a unei molecule este energia necesară pentru a desface molecula în atomi sau ioni (energia de disociație); energia de legătură a unui atom este energia de ionizare completă a acestuia; energia de legătură a unui nucleu este energia necesară pentru a descompune nucleul în nucleoni (proporțională cu defectul de masă); energia de legătură a unui solid este căldura de sublimare etc.

8.7.4. DIMENSIUNILE CÎMPULUI GRAVITAȚIONAL ȘI ALE POTENȚIALULUI GRAVITAȚIONAL

Ele sînt următoarele:

$$[\Gamma] = \frac{[F]}{[m]} = LT^{-2} = m/s^2 \text{ în SI}, \quad (8.56)$$

ceea ce coincide cu dimensiunea accelerației;

$$[V] = \frac{[U]}{[m]} = L^2 T^{-2} = J/kg = m^2/s^2 \text{ în SI}, \quad (8.57)$$

ceea ce coincide cu dimensiunea pătratului vitezei.

Legătura dintre cîmp și potențial este aceeași ca dintre forță și energia potențială:

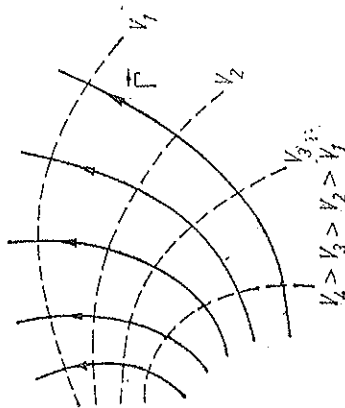
$$dV = -\vec{\Gamma} d\vec{r}, \quad \vec{\Gamma} = -\text{grad } V,$$

$$\Gamma_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\partial_x V,$$

Fig. 8.11

$$\Gamma_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\partial_y V, \quad \Gamma_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\partial_z V. \quad (8.58)$$

Cîmpul este perpendicular pe suprafețele echipotențiale și îndreptat în sensul descrescării (semnul minus la gradient!) potențialului (fig. 8.11).



8.8. FLUXUL CÂMPULUI GRAVITAȚIONAL

a) Un element de suprafață dS se reprezintă printr-un vector perpendicular pe suprafață și de modul egal cu dS (fig. 8.12).

Fluxul $d\Phi$ al câmpului \vec{F} prin acest element dS se definește prin produsul scalar:

$$d\Phi \stackrel{\text{def}}{=} \vec{F} d\vec{S} = F dS \cos \alpha = \Gamma_n dS = \Gamma (dS)_n, \quad (8.59)$$

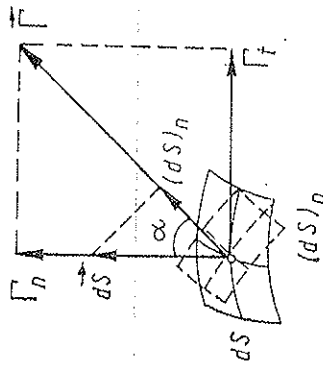


Fig. 8.12

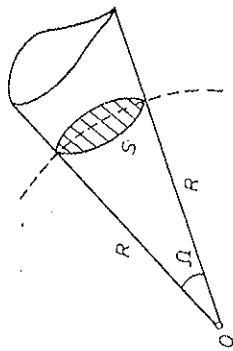


Fig. 8.13

adică la flux nu contribuie decât componenta normală Γ_n a câmpului sau proiecția ariei dS pe planul normal la câmp.

Fie un con oarecare cu vîrf în O (fig. 8.13).

Se numește *unghi solid*, definit de un con, raportul dintre aria S interceptată de con pe o sferă cu centrul în vîrfurile conului și pătratul razei sferei:

$$\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \frac{S}{R^2} \quad S = R^2 \Omega. \quad (8.60)$$

Unghiul solid nu depinde de raza sferei alese și coincide numeric cu aria interceptată pe sfera de rază unitate. Unghiul solid se măsoară în steradiani (sr).

Unghiul solid elementar $d\Omega$ sub care se vede din origine un element de suprafață dS este evident (fig. 8.14):

$$d\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(dS)_n}{r^2} = \frac{d\vec{S} \cdot \vec{r}}{r^2}. \quad (8.61)$$

Unghiul solid sub care se vede dintr-un punct un semispațiu este evident $2\pi R^2/R^2 = 2\pi$, iar unghiul solid total din jurul unui punct este $4\pi R^2/R^2 = 4\pi$.

b) Să calculăm fluxul *total* al câmpului creat de o sarcină punctiformă m înconjurăm particula cu o suprafață închisă oarecare și considerăm un element de suprafață dS cu normala orientată spre exterior. Fluxul elementar prin acest element va fi (fig. 8.14):

$$d\Phi = \vec{F} d\vec{S} = -\gamma \frac{m}{r^2} \vec{r} d\vec{S} = -\gamma \frac{m}{r^2} (dS)_n = -\gamma m d\Omega, \quad (8.62)$$

unde

$$d\Omega = \frac{d\vec{S} \cdot \vec{r}}{r^2} = \frac{(dS)_n}{r^2},$$

adică este proporțional cu masa particulei și cu *unghiul solid* sub care se vede acel element de suprafață din locul unde se află particula m . Integrînd pe toată suprafața, rezultă:

$$\Phi = \oint \vec{F} d\vec{S} = -\gamma m \oint d\Omega = -4\pi \gamma m. \quad (8.63)$$

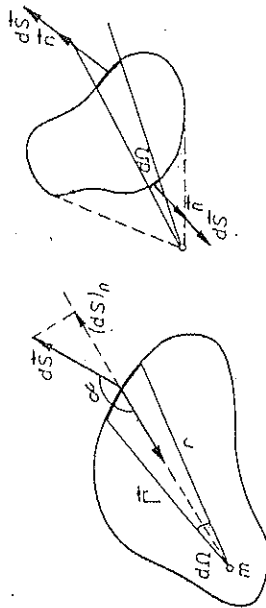


Fig. 8.14

Semnul minus arată că fluxul este îndreptat spre interiorul sferei (particulele m sînt „izvoare negative” de flux: liniile de câmp se termină pe ele).

Dacă particula ar fi în exteriorul suprafeței închise, atunci fluxul total prin acea suprafață închisă ar fi nul, deoarece pentru fiecare element de suprafață există un al doilea situat în același unghi solid elementar, astfel încît cele două fluxuri elementare sînt egale în modul și de sensuri opuse. În interiorul suprafeței închise nu avem izvoare și toate liniile de câmp care intră, ies.

Dacă avem mai multe particule, atunci însumînd contribuțiile lor rezultă (*teorema lui Gauss*):

$$\Phi = \oint \vec{F} d\vec{S} = -4\pi \gamma \sum_k m_k = -4\pi \gamma M, \quad (8.64)$$

unde

$$M = \sum_k m_k = \int_V \rho dV, \quad (dm = \rho dV), \quad (8.65)$$

este masa particulelor din interiorul suprafeței închise considerate.

c) În cazul distribuției continue a masei, integrala pe suprafața închisă din (8.65) se poate transforma (în anumite condiții de continuitate și derivabilitate) în integrala de volum (conform unei teoreme a lui Gauss):

$$\oint_S \vec{F} d\vec{S} = \int_V \text{div } \vec{F} dV, \quad (8.66)$$

unde divergența vectorului $\vec{\Gamma}$ este prin definiție scalarul:

$$\operatorname{div} \vec{\Gamma} = \frac{\partial}{\partial x} \Gamma_x + \frac{\partial}{\partial y} \Gamma_y + \frac{\partial}{\partial z} \Gamma_z = \partial_x \Gamma_x + \partial_y \Gamma_y + \partial_z \Gamma_z. \quad (8.67)$$

Combinând cu (8.65) rezultă

$$\int_V \operatorname{div} \vec{\Gamma} dV = -4\pi \gamma \int_V \rho dV \text{ sau } \operatorname{div} \vec{\Gamma} = -4\pi \gamma \rho \quad (8.68)$$

(volumul V fiind arbitrar) și introducând potențialul V (8.58), obținem *ecuația lui Poisson*:

$$\operatorname{lap} V = \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 4\pi \gamma \rho, \quad (8.69)$$

unde $\operatorname{lap} f$ sau Δf este laplaceanul (operatorul lui Laplace):

$$\operatorname{lap} f = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f,$$

$$\operatorname{lap} = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (8.70)$$

Ecuația lui Poisson (8.69) ne permite să aflăm potențialul V și deci câmpul gravitațional $\vec{\Gamma} = -\operatorname{grad} V$, dacă cunoaștem densitatea ρ de distribuție a masei și condițiile pe frontieră.

8.9. CÂMPUL GRAVITAȚIONAL AL UNEI SFERE OMOGENE

8.9.1. CÂMPUL ȘI POTENȚIALUL

Să calculăm câmpul gravitațional al unei sfere omogene (sau formată din pături omogene) de masă m și rază R (fig. 8.15). În virtutea simetriei sferice, câmpul este *radial* și dependent numai de r . În exteriorul sferei teorema lui Gauss ne dă (integrăm pe sfera de rază r , ținând seama că $\vec{\Gamma}$ este radial și constant pe această sferă):

$$\Phi = \oint \vec{\Gamma} d\vec{S} = \Gamma \oint dS = \Gamma 4\pi r^2 = -4\pi \gamma m \rightarrow \Gamma = -\gamma \frac{m}{r^2}. \quad (8.71)$$

Prin urmare, *câmpul gravitațional al unei sfere omogene în exteriorul ei coincide cu câmpul unui punct material de masă m situat în centrul sferei*.

În fel, expresia (8.53) a potențialului se aplică și în exteriorul unei sfere omogene.

În interiorul sferei omogene, aceeași teoremă ne dă:

$$\Gamma 4\pi r^2 = -4\pi \gamma m_i = -4\pi \gamma \rho \frac{4\pi}{3} r^3 \rightarrow \Gamma = -\gamma \frac{m_i}{r^2} = -\frac{4\pi}{3} \gamma \rho r, \quad (8.72)$$

unde m_i este masa sferei de rază r , interioară față de punctul ales.

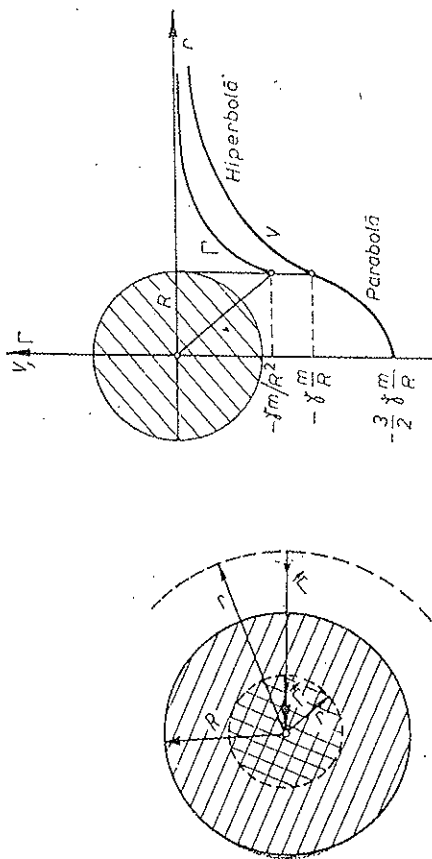


Fig. 8.15

La suprafața sferei câmpul este maxim în modul, spre exterior scade invers proporțional cu pătratul distanței de la centrul sferei, iar în interior este proporțional cu distanța până la centru (fig. 8.16).

Pentru o *pătură sferică omogenă* câmpul în interiorul cavității este nul, deoarece în (8.64) membrul drept va fi nul.

Potențialul în interiorul unei sfere omogene este

$$\begin{aligned} V &= \int_r^\infty \vec{\Gamma} d\vec{r} = \int_r^\infty \left(-\frac{4\pi}{3} \gamma \rho r \right) dr + \int_R^\infty \left(-\gamma \frac{m}{r^2} \right) dr = \\ &= \frac{1}{2} \gamma \rho r^2 - \frac{3}{2} \gamma \rho R^2 = -\frac{1}{2} \gamma \rho R^2 \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right), \quad r < R. \end{aligned} \quad (8.73)$$

În centrul sferei ($r = 0$) potențialul va fi

$$V_0 = -\frac{3}{2} \gamma \frac{m}{R}. \quad (8.74)$$

8.9.2. ENERGIA POTENȚIALĂ GRAVITAȚIONALĂ

Energia potențială gravitațională a unei sfere omogene se calculează cu ajutorul lui (8.55):

$$dm = \rho 4\pi r^2 dr, \quad U = \frac{1}{2} \int V dm = -\frac{1}{2} \gamma \rho \int_0^R \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right) r^2 dr = -\frac{3}{5} \gamma \frac{m^2}{R} \quad (8.75)$$

Energia potențială (8.75), luată cu semn schimbat, reprezintă *energia de legătură gravitațională*, adică energia necesară pentru a împrăști particulele sistemului la infinit sau, altfel, lucrul mecanic care trebuie efectuat împotriva forțelor gravitaționale pentru a desface sistemul în materie difuză împrăștiată la infinit sau, în sfârșit, energia care se degajă la formarea sistemului (prin acțiunea forțelor gravitaționale) din materie difuză împrăștiată la infinit. Astfel, energia de legătură gravitațională a unei sfere cu masa $m = 1$ kg și diametrul $2R = 10$ cm este $-U = 8 \cdot 10^{-10}$ J.

Dacă raza sferei scade, energia potențială scade (crește în valoarea absolută). Diferența de energie potențială se transformă în căldură. Astfel se explică în parte (Kant, Laplace, Helmholtz) incandescența stelelor, presupuse formate din materie cosmică foarte rarefiată, prin contracție gravitațională (restul energiei provine din reacții nucleare).

8.10. ACCELERAȚIA GRAVITAȚIONALĂ

a) Considerând Pământul sferă omogenă sau format din pățuri sferice omogene, putem aplica formulele de la punctul material. Fie \bar{M} , R masa și raza Pământului, m — masa unui corp la altitudinea h . Atunci,

$$\Gamma = -\gamma \frac{M}{r^2} = -\gamma \frac{M}{(R+h)^2} = -g, \quad V = -\gamma \frac{M}{r} = -\gamma \frac{M}{R+h}, \quad (8.76)$$

$$F = -\gamma \frac{mM}{r^2} = -\gamma \frac{mM}{(R+h)^2} = -mg = -G, \quad (8.77)$$

$$g = \frac{\gamma M}{(R+h)^2}, \quad g_0 = \gamma \frac{M}{R^2}, \quad g = g_0 \left(\frac{R}{R+h} \right)^2, \quad (8.78)$$

unde g_0 este accelerația gravitațională la nivelul mării. Câmpul gravitațional terestru coincide cu vectorul accelerației gravitaționale.

Pentru înălțimi mici deasupra solului ($h \ll R$) avem aproximativ:

$$\begin{aligned} U &= mV = -\gamma \frac{mM}{R+h} = -\gamma \frac{mM(R-h)}{R^2-h^2} \approx \\ &\approx -\gamma \frac{mM}{R} + \gamma \frac{mMh}{R^2} = \text{const} + mg_0h, \end{aligned} \quad (8.79)$$

$$g = g_0 \left(\frac{1}{1+h/R} \right)^2 \approx g_0 \left(1 - \frac{2h}{R} \right), \quad \text{pentru } h \ll R. \quad (8.80)$$

În 1930 a fost adoptată următoarea formulă pentru g (φ — latitudinea, h — altitudinea în metri):

$$g = 978,049(1 + 0,0052884 \sin^2 \varphi - 0,0000059 \sin 2\varphi) - 0,0003086 h, \text{ cm/s}^2. \quad (8.81)$$

b) Cunosând γ , R și g_0 putem calcula masa Pământului din (8.78), precum și densitatea medie:

$$M = g_0 R^2 \frac{1}{\gamma} = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}, \quad \bar{\rho} = \frac{M}{V} = 5,5 \text{ g/cm}^3. \quad (8.82)$$

În realitate, scoarța terestră are o densitate de $2,5 \text{ g/cm}^3$, de unde rezultă că densitatea nucleului terestru trebuie să fie mai mare de $5,5 \text{ g/cm}^3$.

Energia de legătură gravitațională a Pământului rezultă din (8.75): $-U = 2,25 \cdot 10^{32} \text{ J}$.

Pentru o variație mică a razei, obținem din (8.75) prin diferențiere:

$$\Delta U = \frac{3}{5} \gamma \frac{m^2}{R^2} \Delta R = -U \frac{\Delta R}{R}. \quad (8.83)$$

Dacă raza terestră s-ar micșora cu 1 m, prin contracție gravitațională a globului, ar rezulta o energie

$$-\Delta U = 3,5 \cdot 10^{23} \text{ J}$$

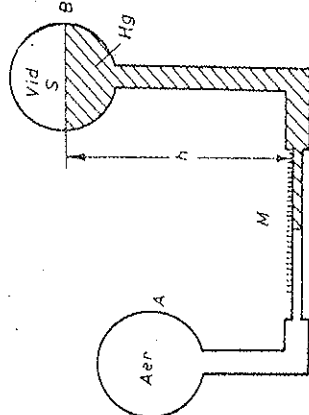
de peste un milion de ori mai mare decât producția mondială anuală actuală de energie electrică ($\sim 3 \cdot 10^{19} \text{ J}$).

Masa Soarelui M se poate calcula din (8.48):

$$M = \frac{4\pi^2}{\gamma} \frac{a^3}{T^2} = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}, \quad (8.84)$$

unde $a = 149,5 \cdot 10^6 \text{ km}$ este distanța Pământ—Soare și T perioada de revoluție a Pământului (1 an).

c) *Accelerația gravitațională terestră* variază pe suprafața Pământului datorită densităților diferite ale straturilor geologice (pe aceasta se bazează și o metodă de prospecțiune geologică pe baza anomaliilor gravimetrice). Variațiile lui g se pot măsura cu ajutorul barometrului universal al lui M. V. Lomonosov (1757) (fig. 8.17). În balonul A este aer, iar în balonul B este mercur, deasupra fiind vidul barometric. Aparatul este menținut la 0°C (într-o cuvă cu gheață și apă în echilibru termic). Temperatura aerului din A fiind constantă, se aplică legea Boyle-Mariotte pentru transformarea izotermă: $pV = \text{const}$. Presiunea p este însă echilibrată de coloana de mercur: $p = \rho gh$. Dacă g variază, variază p , deci și volumul aerului din A , deci meniscul M se deplasează în tubul capilar. Deoarece suprafața S este foarte mare față de secțiunea capilarului, înălțimea h practic nu variază. Precizia măsurătorilor este foarte mare.



8.11. SATELIȚII ARTIFICIALI

Sateți artificiali se supun legilor mișcării ale lui Kepler. Considerând pentru simplificare orbite circulare, avem:

$$F = \frac{\gamma m M}{(R+h)^2} = mg = \frac{mv^2}{R+h}, \quad g = g_0 \left(\frac{R}{R+h} \right)^2. \quad (8.85)$$

de unde viteza și perioada satelitelui:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{g(R+h)} = R \sqrt{\frac{g_0}{R+h}}, \\ T &= \frac{2\pi(R+h)}{v} = 2\pi \frac{R+h}{R} \sqrt{\frac{R}{g_0}}. \end{aligned} \quad (8.86)$$

La nivelul mării rezultă (prima viteză cosmică):

$$v_1 = \sqrt{g_0 R} \approx 7,9 \text{ km/s}, \quad T_1 = 2\pi \sqrt{R/g_0} \approx 1 \text{ h } 25 \text{ min}. \quad (8.87)$$

Pentru a putea părăsi definitiv câmpul de atracție terestru, corpul trebuie să aibă o energie cinetică cel puțin egală cu energia sa potențială sau cu lucrul mecanic efectuat împotriva forțelor de atracție:

$$\frac{mv^2}{2} = mg_0 R = \int_r^\infty \gamma \frac{mM}{r^2} dr, \quad v_{11} = \sqrt{2g_0 R} = \sqrt{2} \cdot v_1 = 11,2 \frac{\text{km}}{\text{s}}, \quad (8.88)$$

— cea de-a doua viteză cosmică.

Există și o a treia viteză cosmică, necesară corpului pentru a putea ieși din câmpul gravitațional al Soarelui, deci a părăsi sistemul solar și a ieși în spațiul cosmic interstelar (circa 180 km/s, la lansarea de pe Pământ).

8.12. MASA INERTĂ ȘI MASA GREA. PRINCIPIUL ECHIVALENTEI

a) În legea fundamentală a dinamicii intervine masa inertă sau inerțială m_i a corpului, adică măsura inerției sale, a tendinței corpului de a-și păstra starea de mișcare rectilinie uniformă, și de a se opune, reacționa, la forțe aplicate. În legea atracției universale intervine masa grea sau gravifică (gravitațională) m_g a corpului, adică proprietatea masei de a genera un câmp gravitațional și a suferi influența unui câmp gravitațional:

$$F = m_i a, \quad F = -\gamma \frac{m_g M_g}{r^2}. \quad (8.89)$$

Aceste legi fiind independente, s-a pus problema dacă masele inertă și grea sînt diferite sau reprezintă o aceeași mărime fizică. Experiențele de mare precizie ale lui Eötvös au arătat că cele două mase sînt proporționale, și în unități adecvate (de exemplu, în SI), sînt egale (primele experiențe au fost făcute chiar de I. Newton). Experiența lui Eötvös se bazează pe faptul că greutatea aparentă a unui corp este egală în modul cu tensiunea din firul de suspensie (fig. 8.18) măsurată de exemplu cu un dinamometru. Direcția firului de suspensie nu coincide cu direcția razei terestre. În adevăr, tensiunea \vec{T} din fir, compusă cu forța de atracție gravitațională $m_g \vec{g}$, în care intervine masa grea, trebuie să dea forța rezultantă centripetă (din cauza mișcării corpului pe cerul paralel odată cu rotația diurnă a Pământului), $m_i \omega^2 R \cos \varphi$ (conform legii fundamentale $\vec{F} = m_i \vec{a}$), în care intervine masa inertă.

Pentru unghiul de deviere α rezultă:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{m_i \omega^2 R \cos \varphi \sin \varphi}{m_g g_0 - m_i \omega^2 R \cos^2 \varphi} = \\ &= \frac{\omega^2 R \cos \varphi \sin \varphi}{\frac{m_g}{m_i} g_0 - \omega^2 R \cos^2 \varphi}. \end{aligned} \quad (8.90)$$

Dacă masele $m_{i,g}$ sînt proporționale, unghiul α va fi același pentru toate corpurile (adică direcția firului de suspensie rămîne invariabilă dacă schimbăm corpurile suspendate), ceea ce este confirmat de experiență. Prin urmare, *inerția și gravitatea sînt proprietăți ale unei mase unice*.

S-ar putea construi un sistem de unități „gravitațional” în care $\gamma = 1$. Atunci dimensiunea forței ar fi:

$$[F] = \frac{[m]^2}{[l]^2} = M^2 L^{-2} = \text{kg}^2/\text{m}^2, \quad (8.91)$$

în schimb, în legea fundamentală a dinamicii ar apărea un coeficient parazit:

$$F = kma, \quad [k] = \frac{[F]}{[m][a]} = \frac{M^2 L^{-2}}{ML T^{-2}} = L^{-3} M T^2, \quad (8.92)$$

avînd valoarea $k = 1/\gamma = 10^{34}/6,67 \text{ kg} \cdot \text{s}^2/\text{m}^3$. Sistemul SI este deci un sistem „dinamic” (sau „inerțial”).

b) După cum am văzut, o particulă de masă m aflată într-un câmp gravitațional \vec{T} capătă o accelerație $\vec{a} = \vec{T}$, independentă de masa particulei. Pe de altă parte, o particulă izolată, considerată într-un SR inerțial, care se deplasează cu accelerația \vec{a} față de SR inerțiale, se comportă analog, anume are o accelerație $-\vec{a}$, independentă de masa particulei. Fie, de exemplu, o

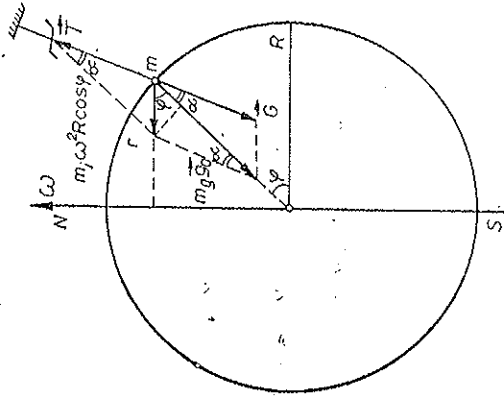


Fig. 8.18

rachetă care se mișcă în spațiul interaștrăl, departe de stele, astfel încât câmpul gravitațional să poată fi neglijat. Cât timp racheta se mișcă rectiliniu uniform față de SR inerțial (de exemplu, SR astronomic, legat de stelele „fixe”), toate obiectele din rachetă vor fi în stare de „imponderabilitate”, în poziții indifferente, fixe, față de rachetă. Dacă racheta capătă o accelerație \vec{a} față de SR inerțial, toate obiectele din interiorul ei vor „cădea” cu accelerația $-\vec{a}$, corespunzător forței complementare $\vec{F}_c = -m\vec{a}$. Dar, în același mod s-ar comporta corpurile din interiorul rachetei, dacă ea s-ar mișca *inerțial* și în schimb ar acționa un câmp gravitațional omogen $\vec{\Gamma} = -\vec{a}$, generând forța de greutate $\vec{P} = m\vec{\Gamma} = \vec{F}_c$. Nici o experiență efectuată în interiorul rachetei n-ar putea distinge dacă ne aflăm într-o rachetă în mișcare accelerată față de SR inerțial sau ne mișcăm inerțial (față de stele) dar ne aflăm într-un câmp gravitațional echivalent.

Reciproc, dacă racheta se mișcă liber într-un câmp gravitațional $\vec{\Gamma}$, de exemplu un satelit artificial în câmpul gravitațional terestru, atunci ea capătă o accelerație $\vec{a} = \vec{\Gamma}$, deci constituie un SR inerțial în mișcare cu această accelerație (în cazul satelitului, accelerație gravitațională \vec{g}). Dar comportarea obiectelor într-un SR inerțial în mișcare cu accelerația \vec{a} este identică, după cum am văzut, cu comportarea lor într-un SR inerțial în care ar acționa un câmp gravitațional $-\vec{a}$, care tocmai compensează câmpul gravitațional dat în care se mișcă liber racheta. Ca rezultat, obiectele din interiorul rachetei devin „imponderabile”, comportându-se la fel ca într-un SR inerțial și în absența câmpului gravitațional. Prin urmare, considerând mișcarea față de un SR inerțial mișcat adecvat, putem „anihila” (local) câmpul gravitațional. Un alt exemplu celebru este „liftul lui Einstein”. Dacă liftul cade liber cu accelerația gravitațională \vec{g} , toate obiectele din cabină devin imponderabile (cad la fel, cu aceeași accelerație \vec{g} , ca în experiența cu tubul lui Newton), ca și cum liftul ar sta pe loc și ar dispărea câmpul gravitațional. Reciproc, dacă liftul este tras vertical în sus cu accelerația \vec{g} , toate obiectele din cabină devin de două ori mai grele, ca și cum liftul ar sta pe loc și câmpul gravitațional s-ar dubla.

Comportarea identică a corpurilor într-un câmp gravitațional și într-un SR inerțial constituie *principiul echivalenței* dintre gravitație și inerție (dintre forțele de gravitație și forțele de inerție). Acest principiu rezultă din egalitatea dintre masa inertă și masa grea și stă la baza teoriei relativiste a gravitației (teoria generală a relativității creată de A. Einstein în 1915—1916). Trebuie însă observat că echivalența amintită are caracter *local* (pe intervale mici de spațiu și timp) și nu global, câmpurile gravitaționale reale fiind totdeauna neomogene.

Problema rezolvată. O navă cosmică de masă $M = 12$ t se mișcă în jurul Lunii pe o orbită circulară la altitudinea $h = 100$ km. Pentru a trece pe orbita de aselenizare se conectează pentru scurt timp motorul. Viteza de ejectare a gazelor $u = 10$ km/s. Raza Lunii $R_L = 1,7 \cdot 10^3$ km, accelerația căderii libere la suprafața Lunii $g_L = 1,6$ m/s².

- Ce cantitate de combustibil trebuie consumat pentru ca prin conectarea motorului în regim de frinare în punctul A al traiectoriei navă să aselenizeze în punctul B (fig. 8.19, a)?
- În a doua variantă a aselenizării, i se comunică navei în punctul A un impuls îndreptat spre centrul Lunii pentru a o trece pe o orbită tangentă la Lună în punctul C (fig. 8.19, b). Ce cantitate de combustibil trebuie consumat în acest caz?

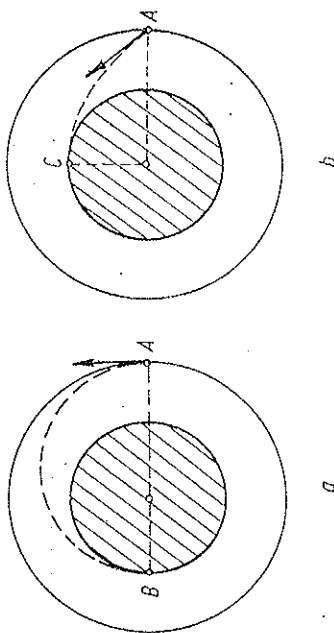


Fig. 8.19

Rezolvare. a) După impulsul de frinare, navă are viteza \vec{v}_A în același sens cu viteza \vec{v} de dinainte. Conform legii lui Kepler navă se va mișca pe o elipsă cu centrul Lunii în focarul elipsei și cu vîrfurile elipsei în A („apogeu”) și B („perigeu”). După încetarea funcționării motorului scriem ecuația conservării energiei mecanice (cinetice și potențiale) și a momentului cinetic față de centrul Lunii (pentru punctele A, B):

$$\frac{1}{2} (M - m_0) v_A^2 - \gamma \frac{M_L (M - m_0)}{R_L + h} = \frac{1}{2} (M - m_0) v_B^2 - \gamma \frac{M_L (M - m_0)}{R_L},$$

$$(M - m_0) v_A (R_L + h) = (M - m_0) v_B R_L.$$

Din aceste ecuații obținem:

$$v_A = \sqrt{2\gamma \frac{M_L R_L}{(R_L + h)(2R_L + h)}} = R_L \sqrt{\frac{2g_L}{R_L + h}},$$

unde am ținut seama că $g_L = \gamma M_L / R_L^2$.

Viteza inițială a navei se obține din legea fundamentală:

$$\gamma \frac{M_L M}{(R_L + h)^2} = \frac{M v^2}{R + h}, \quad v = \sqrt{\gamma \frac{M_L}{R_L + h}} = R_L \sqrt{\frac{g_L}{R_L + h}} \approx 1,6 \text{ km/s}.$$

Scriem conservarea impulsului în procesul de frinare:

$$M v = (M - m_0) v_A + m_0 (v + u),$$

de unde

$$(M - m_0)(v - v_A) = m_0 u.$$

Dar

$$v - v_A = R_L \sqrt{\frac{g_L}{R_L + h}} \left(1 - \sqrt{\frac{2R_L}{2R_L + h}} \right) = v \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + h/2R_L}} \right) \approx \approx v \left[1 - \left(1 - \frac{h}{4R_L} \right) \right] = v \frac{h}{4R_L} \approx 24 \text{ m/s}.$$

În sfîrșit,

$$m_0 = \frac{M - m_0}{u + v - v_A} \approx \frac{M - m_0}{u} \approx 29 \text{ kg}.$$

Se poate folosi direct formula lui Meşterski:

$$v - v_A = u \ln \frac{M}{M - m_c} = u \ln \frac{1}{1 - m_c/M} \approx u \ln \left(1 + \frac{m_c}{M} \right) \approx u \frac{m_c}{M}.$$

b) Scriem conservarea energiei:

$$\frac{1}{2} (M - m_c) v_A^2 - \gamma \frac{M_L(M - m_c)}{R_L + h} = \frac{1}{2} (M - m_c) v_0^2 - \gamma \frac{M_L(M - m_c)}{R_L},$$

$$v_A^2 = v^2 + v_r^2,$$

unde v_r este viteza imprimată radial către centrul Lunii.

Scriem conservarea momentului cinetic (faţă de centrul Lunii):

$$(M - m_c) v_0 (R_L + h) = (M - m_c) v_0 R_L,$$

unde componenta v_r nu contribuie evident la momentul cinetic.

Din aceste ecuaţii obţinem:

$$v_r = h \sqrt{\frac{g_L}{R_L + h}} \approx 96 \text{ m/s}.$$

Din conservarea impulsului pe direcţia radială, avem:

$$0 = (M - m_c) v_r - m_c u,$$

$$m_c = M \frac{v_r}{v_r + u} \approx M \frac{v_r}{u} \approx 115 \text{ kg}.$$

PROBLEME

1. Să se calculeze câmpul gravitaţional Γ al unui inel subțire de masă m și rază R , la o distanță z de centrul inelului, pe axa acestuia. La ce distanță câmpul este maxim și ce valoare are?

$$R. \quad \Gamma = \gamma m \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}}, \quad z_m = R/\sqrt{2}, \quad \Gamma_m = \frac{2\gamma m}{3R^2\sqrt{5}}.$$

2. Două sfere omogene de raze $R_{1,2}$ și mase $m_{1,2}$ aflate la distanța l dintre centrele lor, pornesc din repaus sub acțiunea forțelor de atracție gravitațională. Cu ce viteză relativă se vor ciocni ele?

$$R. \quad v_r = \sqrt{2\gamma(m_1 + m_2) \left(\frac{1}{R_1 + R_2} - \frac{1}{l} \right)}.$$

3. Două particule de mase $m_{1,2}$ aflate la distanța l dintre ele, pornesc din repaus sub acțiunea forțelor de atracție gravitațională. După cât timp se ciocnesc ele?

$$R. \quad t = \frac{\pi}{2} l \sqrt{\frac{l}{2\gamma(m_1 + m_2)}}.$$

4. Un corp este aruncat vertical în sus de la suprafața Pământului cu viteza inițială v_0 . Neglijând rezistența aerului, să se afle la ce înălțime maximă se ridică corpul și timpul de arcare.

$$R. \quad h_{\max} = R \frac{v_0^2}{\sqrt{2gR - v_0^2}}, \quad t_a = \frac{R}{2gR - v_0^2} \left[v_0 + \frac{2gR}{\sqrt{2gR - v_0^2}} \arcsin \frac{v_0}{\sqrt{2gR}} \right].$$

5. Un corp de masă m cade de la înălțime mare h , fără viteză inițială. Neglijând rezistența aerului, să se afle energia cinetică cu care ajunge corpul la suprafața Pământului și timpul de cădere.

$$R. \quad E_c = mgh \frac{R}{R + h}, \quad t_c = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{R + h}{2g}} \left[\sqrt{R^2 + (R + h)^2} \arcsin \sqrt{\frac{h}{R + h}} \right].$$

6. Cunoscind durata anului $T = 365$ zile $= 3,16 \cdot 10^7$ s, distanța Pământ-Soare $R_{ps} = 150 \cdot 10^6$ km și unghiul sub care se vede de pe Pământ discul solar $\alpha = 32'$, să se calculeze accelerația gravitațională de cădere liberă la suprafața Soarelui.

$$R. \quad g_s \approx \frac{16\pi^2}{\alpha^2} \frac{1}{T^2} R_{ps} \approx 270 \text{ m/s}^2.$$

7. O planetă descrie o elipsă cu excentricitatea e . Știind viteza v_1 a planetei la periheliu, să se afle viteza ei la afeliu.

$$R. \quad v_2 = \frac{1 - e}{1 + e} v_1.$$

8. Pentru mișcarea unei planete în jurul Soarelui pe o elipsă cu semiaxa mare egală cu a , să se arate că: a) $v^2 = \gamma M \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$; b) $v_{\max} = \sqrt{\frac{M}{a}}$; c) $\sqrt{v_1 v_2} = v_{\max}$, unde $v_{1,2}$ sînt vitezele la extremitățile unui diametru al orbitei.

9. Un satelit se mișcă pe o orbită circulară de rază r cu perioada de revoluție T . Dacă i se imprimă satelitului o viteză radială u sau o viteză suplimentară tangențială u , el trece pe o orbită eliptică. Care va fi noua perioadă de revoluție în cele două cazuri?

$$R. \quad T_1 = T \left[1 - \left(\frac{uT}{2\pi r} \right)^2 \right]^{-3/2}; \quad T_2 = T \left[1 + \left(\frac{uT}{2\pi r} \right)^2 \right]^{-3/2}.$$

10. Pentru mișcarea unei planete pe o orbită eliptică, de excentricitate e și parametru p , să se deducă următoarele formule pentru componentele vitezei:

$$v_r = \sqrt{\frac{\gamma M}{p}} e \sin \theta, \quad v_\theta = \sqrt{\frac{\gamma M}{p}} (1 + e \cos \theta),$$

respectiv

$$v_x = -\sqrt{\frac{\gamma M}{p}} \sin \theta, \quad v_y = \sqrt{\frac{\gamma M}{p}} (e + \cos \theta).$$

Să se arate că hodograful vitezei este un cerc cu raza $\sqrt{\frac{\gamma M}{p}}$ și centrul în $\left(\frac{\pi}{2}, e \sqrt{\frac{\gamma M}{p}} \right)$ respectiv $\left(0, e \sqrt{\frac{\gamma M}{p}} \right)$.

11. O cometă se mișcă pe o orbită parabolică de parametru p . La periheliu viteza ei este v_0 . Să se afle viteza cometei la distanța r de Soare.

$$R. \quad v = v_0 \sqrt{\frac{p}{2r}}.$$

12. Să se arate că la mișcarea în cimp central, energia cinetică se poate scrie sub forma:

$$E_c = \frac{L^2}{2m} \left[\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d(1/r)}{d\theta} \right)^2 \right]$$

13. Un punct material se mișcă sub acțiunea unei forțe centrale într-un mediu rezistent. Să se arate că oricare ar fi legea forței de rezistență, punctul descrie o traiectorie plană al cărei plan trece prin centrul forței.

14. O particulă de masă m , sub acțiunea unei forțe centrale de atracție, descrie un cerc de rază R , centrul forței fiind situat *pe cerc*. Când particula se găsește la distanța $2R$ de centrul forței, viteza ei este v_0 . Să se afle viteza particulei și legea forței în funcție de distanța r până la centrul forței.

R.

$$v = 4R^2 v_0 / r^2, \quad F = -32mR^2 v_0^2 / r^3.$$

15. O navă se rotește cu viteza unghiulară ω_0 . Pe navă există un volant de masă M care poate fi rotit de un motor în jurul aceleiași axe ca și nava (fig. 8.20). Știind momentul

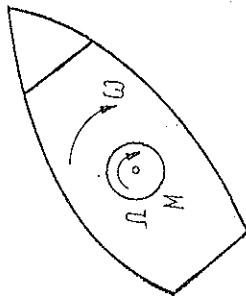


Fig. 8.20

de inerție al volantului I și al navei (întregi) I_0 , să se calculeze ce lucru mecanic trebuie să efectueze motorul pentru a opri rotația navei.

R.

$$W = \frac{1}{2} \frac{I_0(I_0 - I)}{I} \omega_0^2$$

16. Știind distanța minimă r_1 (periheliu) și cea maximă r_2 (afeliu) ale unei planete de masă m , față de Soare, de masă M , să se afle perioada de revoluție T și momentul cinetic L ale planetei față de Soare. Se dă constanta gravitațională γ .

R.

$$T = \pi \sqrt{(r_1 + r_2)^3 / 2\gamma M}, \quad L = m \sqrt{2\gamma M r_1 r_2 (r_1 + r_2)}.$$

17. Știind perioada de revoluție T a unei planete în jurul Soarelui, să se calculeze în cât timp cade pe Soare (neglijând dimensiunile Soarelui) un corp de la o distanță egală cu raza orbitei planetei.

R.

$$\tau = T/4\sqrt{2}.$$

18. Să se calculeze presiunea p în interiorul unei sfere omogene de masă m și rază R (se dă constanta gravitațională γ).

R.

$$p = \frac{3\gamma M^2}{8\pi R^4} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right).$$

CAPITOLUL 9

CINEMATICA MIȘCĂRILOR RELATIVĂ ȘI ABSOLUTĂ

Mișcarea corpurilor este totdeauna studiată în raport cu un SR. Oricare ar fi SR ales, el se află la rândul său în mișcare față de alte corpuri. Este important de știut cum se schimbă mărimile fizice când trecem de la un SR la altul, ce este intrinsec (absolut), independent de SR și ce este relativ, dependent de SR ales.

9.1. MIȘCĂRILE ABSOLUTĂ, RELATIVĂ ȘI DE TRANSPORT

Fie două SR; unul din ele se consideră *prin convenție fix* (S), iar celălalt va fi atunci numit *mobîl* (S'). Mișcarea corpului față de SR fix se numește *absolută*, iar față de SR mobil — *relativă* (Mariotte). Mișcarea SR mobil, *împreună cu toate punctele legate rigid (solidar) de el*, față de SR fix, se numește *mișcare de transport* sau de antrenare (fig. 9.1).

Exemple: a) Mișcarea unui pasager față de vapor este mișcare relativă, mișcarea aceluiași pasager față de ocean — mișcare absolută, mișcarea vaporului față de ocean — mișcare de transport.

b) Mișcarea unui satelit față de Pământ este mișcare relativă, mișcarea aceluiași satelit față de Soare — mișcare absolută, mișcarea Pământului față de Soare — mișcare de transport.

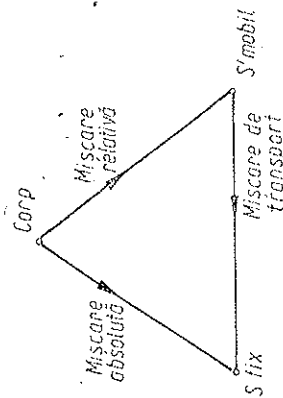


Fig. 9.1

9.2. COMPUNEREA DEPLASĂRIILOR ȘI A VITEZELOR

a) Fie un punct material P a cărui mișcare este studiată sau raportată la două SR (repere), unul considerat fix S și altul mobil S' (fig. 9.2). După un interval de timp $\Delta t = t_1 - t_0$ mobilul se deplasează (privit din S) din P_0

în P_1 , iar reperul mobil se deplasează din poziția S' în poziția S'_1 (fig. 9.3). Deplasarea absolută a mobilului, față de S , este

$$\Delta \vec{r}_{\text{abs}} = \vec{PP}_1 = \vec{r}_1 - \vec{r}.$$

Pentru a găsi deplasarea relativă trebuie să marcăm mai întâi față de S'_1 poziția inițială a mobilului așa cum a înregistrat-o și o consideră în continuare observatorul mobil (din S'), adică poziția punctului P deplasat *solidar* cu S' .

Acesta este punctul \tilde{P} situat față de S'_1 *exact la fel* ca P față de S' . Pentru observatorul mobil punctele P , \tilde{P} se confundă deoarece reprezintă pentru el poziția inițială a mobilului.

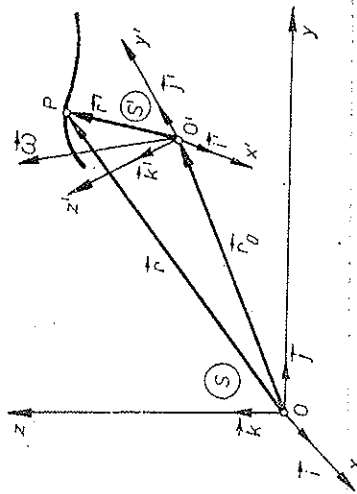


Fig. 9.2

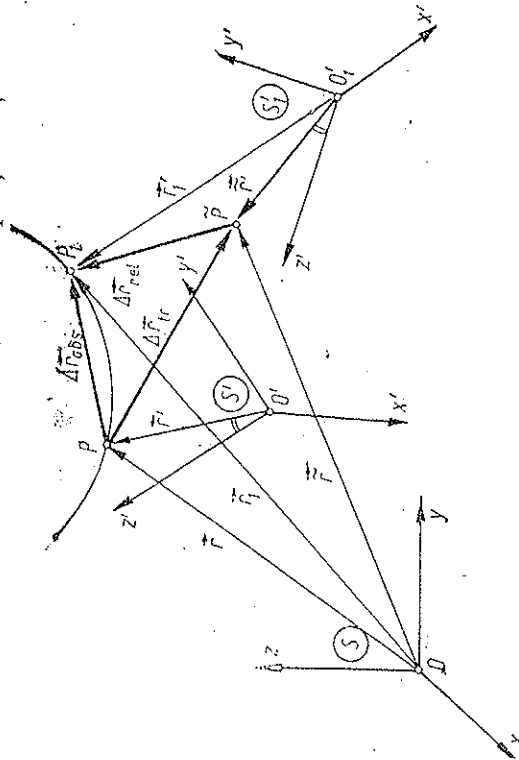


Fig. 9.3

lului. Deplasarea $P\tilde{P}$ reprezintă pentru observatorul fix (din S) deplasarea unui punct P legat rigid de reperul mobil S' , deci reprezintă deplasarea de *transport* sau de antrenare:

$$\Delta \vec{r}_{\text{tr}} = \vec{P\tilde{P}} = \vec{r}_1 - \vec{r}.$$

Pentru observatorul mobil poziția inițială și cea finală ale mobilului sînt

\vec{r} și P_1 și deci deplasarea relativă $\Delta \vec{r}_{\text{rel}} = \vec{P\tilde{P}}_1 = \vec{r}_1 - \vec{r}$. Aceste poziții \vec{r}_1 , \vec{r}_1' și această deplasare $\vec{r}_1 - \vec{r}$ în intervalul (t, t_1) pentru a fi considerate *relative la S'* trebuie măsurate cu instrumentele de măsură (rigle și ceasornice) proprii observatorului mobil S' , adică aflate „la bordul” lui S' , deoarece, în

adevăr, observatorul mobil măsoară elementele mișcării relative (\vec{r}' la t' , \vec{r}'_1 la t'_1 , unde $t' = t$ — timpul măsurat în S'), deci față de el, cu mijloacele sale proprii. Instrumentele din S' pot fi de exemplu transportate din S sau etalonate (sincronizate) după cele din S , la un moment dat, după un anumit procedeu sau construite după aceeași „rețetă”.

Se pune întrebarea dacă măsurind aceeași distanță (de exemplu, \vec{PP}_1) sau lungime a unui obiect sau durată a unui proces (de exemplu, $\Delta t = t_1 - t$, respectiv $\Delta t' = t'_1 - t'$), din diferite SR , se obțin aceleași rezultate sau, altfel, dacă *rezultatele măsurărilor de lungime și durată depind de starea de mișcare a instrumentelor sau a obiectelor măsurate*.

În mecanica clasică se consideră că lungimile și duratele, măsurate în diferite SR , sînt *egale*, independente de mișcarea SR sau *invariante* la schimbarea SR sau, altfel, au un caracter absolut (desigur cu rigle și ceasornice etalonate identic).

O serie de experiențe efectuate la sfîrșitul secolului trecut, privind propagarea luminii, au dus la concluzia că la viteze mari, apropiate de viteza luminii în vid ($c = 3 \cdot 10^8$ m/s), ipoteza de mai sus nu mai este corectă. Astfel s-a născut teoria relativității (A. Einstein, 1905). De mecanica relativistă ne vom ocupa într-un capitol aparte (Cap. 11).

Rămînd în cadrul mecanicii *nerelativiste* (viteze obișnuite, deci mici față de viteza luminii), este valabilă ipoteza caracterului absolut al lungimilor și duratelor. Atunci, conform fig. 9.3, în relația

$$\vec{PP}_1 = \vec{P\tilde{P}} + \vec{P\tilde{P}}_1, \quad (9.1)$$

deplasarea $\vec{P\tilde{P}}_1$ are aceeași valoare în S și S' , deci poate fi considerată deplasare *relativă* $\Delta \vec{r}_{\text{rel}}$, adică măsurată cu instrumentele din S' . Obținem astfel *legea de compunere a deplasărilor*:

$$\Delta \vec{r}_{\text{abs}} = \Delta \vec{r}_{\text{rel}} + \Delta \vec{r}_{\text{tr}} \quad \text{sau} \quad d\vec{r}_{\text{abs}} = d\vec{r}_{\text{rel}} + d\vec{r}_{\text{tr}}. \quad (9.2)$$

Cum am presupus și caracterul absolut al duratelor $\Delta t = t_1 - t = \Delta t' = t'_1 - t'$ sau $dt = dt'$, împărțind relațiile de mai sus la $\Delta t = \Delta t'$, respectiv la $dt = dt'$, obținem legea de compunere a vitezelor:

$$\frac{\Delta \vec{r}_{\text{abs}}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}_{\text{rel}}}{\Delta t'} + \frac{\Delta \vec{r}_{\text{tr}}}{\Delta t}, \quad \frac{d\vec{r}_{\text{abs}}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{\text{rel}}}{dt'} + \frac{d\vec{r}_{\text{tr}}}{dt}. \quad (9.3)$$

$$\vec{v}_{\text{abs}} = \vec{v}_{\text{rel}} + \vec{v}_{\text{tr}}.$$

b) Să deducem acum *analitic* compunerea deplasărilor și a vitezelor. Conform fig. 9.2:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}', \quad d\vec{r} = d\vec{r}_0 + d\vec{r}', \quad (9.4)$$

$$\begin{aligned} d\vec{r}' &= dx' \vec{i}' + dy' \vec{j}' + dz' \vec{k}' + x' d\vec{i}' + y' d\vec{j}' + z' d\vec{k}' = \\ &= \left(\frac{dx'}{dt'} \vec{i}' + \frac{dy'}{dt'} \vec{j}' + \frac{dz'}{dt'} \vec{k}' \right) dt' + \vec{\omega} \times \vec{r}' dt', \end{aligned}$$

unde x' este timpul în reperul S' și am aplicat formulele lui Poisson. În virtutea ipotezei caracterului absolut al duratelor și lungimilor: $t = t'$, $dt = dx'$ și coordonatele x', y', z' ca și dx', dy', dz' coincid cu cele relative, măsurate cu instrumentele din S' , prin urmare,

$$d\vec{r}' = \vec{v}_{rel} dt + \vec{\omega} \times \vec{r}' dt, \quad \vec{r}' = \vec{v}_{rel} + \vec{\omega} \times \vec{r}'. \quad (9.5)$$

Observăm că $d\vec{r}/dt = \vec{v} = \vec{v}_{abs}$ în timp ce $d\vec{r}'/dt \neq \vec{v}_{rel}$, ci

$$d\vec{r}'/dt = \vec{v}_{rel} + \vec{\omega} \times \vec{r}'. \quad (9.5')$$

Rezultă astfel legea de compunere a deplasărilor:

$$\begin{aligned} d\vec{r}_{abs} = d\vec{r} = \vec{v} dt &= d\vec{r}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}' dt + \vec{v}_{rel} dt = \vec{v}_{rel} dt + \\ &+ (\vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}') dt = d\vec{r}_{rel} + d\vec{r}_0 \end{aligned} \quad (9.6)$$

și legea de compunere a vitezelor:

$$\vec{v}_{abs} = \vec{v}_{rel} + \vec{v}_0, \quad \vec{v}_{abs} = \vec{v}, \quad \vec{v}_0 = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}' \quad (9.7)$$

Viteza relativă este

$$\vec{v}_{rel} = \dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}' + \dot{z}'\vec{k}', \quad (9.8)$$

unde în calculul vitezei relative variază doar coordonatele relative x', y', z' ale mobilului față de S' cu $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ considerați fiși.

Viteza de transport sau de antrenare este

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}' = \vec{v}_0 + \vec{v}_{rot} \quad (9.9)$$

este viteza mobilului P considerat legat rigid de SC mobil sau, altfel, este viteza punctului „suport” din S' prin care trece mobilul P în momentul respectiv sau, încă, este viteza mobilului față de S dacă mobilul s-ar opri în acel moment față de S' și ar fi doar antrenat de S' . Viteza de transport \vec{v}_0 se pune în general din viteza de translație \vec{v}_0 a originii lui S' plus o viteză \vec{v}_{rot} datorită rotației reperului S' în jurul axei $\vec{\omega}$, așa cum am văzut la mișcarea rigidului.

9.3. COMPUNEREA ACCELERAȚIILOR

Derivăm (9.7):

$$\vec{a}_{abs} = \dot{\vec{v}}_{abs} = \dot{\vec{v}}_{rel} + \dot{\vec{v}}_0,$$

unde însă, \vec{v}_{rel} nu coincide încă cu \vec{a}_{rel} , la fel cum \vec{r} nu coincide cu \vec{v}_{rel} (9.5), anume:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{v}}_{rel} &= (\dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}' + \dot{z}'\vec{k}') = \ddot{x}'\vec{i}' + \ddot{y}'\vec{j}' + \ddot{z}'\vec{k}' + \\ &+ \dot{x}'\dot{\vec{i}}' + \dot{y}'\dot{\vec{j}}' + \dot{z}'\dot{\vec{k}}' = \vec{a}_{rel} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}. \end{aligned} \quad (9.10)$$

La fel, \vec{v}_0 nu coincide cu \vec{a}_0 , anume

$$\begin{aligned} \dot{\vec{v}}_0 &= \dot{\vec{v}}_0 + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}' = \vec{a}_0 + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \\ &\times (\vec{v}_{rel} + \vec{\omega} \times \vec{r}') = \vec{a}_0 + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{v}_{rel}. \end{aligned} \quad (9.11)$$

Obținem astfel legea de compunere a accelerațiilor (G. Coriolis 1831):

$$\vec{a}_{abs} = \vec{a}_{rel} + \vec{a}_0 + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} = \vec{a}_{rel} + \vec{a}_0 + \vec{a}_{cor}, \quad (9.12)$$

unde

$$\vec{a}_{rel} = \ddot{x}'\vec{i}' + \ddot{y}'\vec{j}' + \ddot{z}'\vec{k}', \quad (9.13)$$

este evident accelerația relativă;

$$\vec{a}_0 = \dot{\vec{v}}_0 + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = \vec{a}_0 + \vec{a}_c + \vec{a}_\omega \quad (9.14)$$

este accelerația de transport (sau de antrenare), adică accelerația celui punct-suport din S' prin care trece mobilul P , așa cum am văzut la mișcarea rigidului (Cap. 5):

$$\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}, \quad (\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} = 0) \quad (9.15)$$

este **accelerația Coriolis** (matematician francez 1792 — 1843). Această accelerație suplimentară este *perpendiculară pe axa momentană de rotație* $\vec{\omega}$ și pe viteza relativă \vec{v}_{rel} , și apare numai atunci când S' se rotește și mișcarea relativă a mobilului are o componentă *transversală* pe axa de rotație. Accelerația Coriolis este un efect de „interferență” dintre mișcarea relativă și cea de transport.

Apariția accelerației suplimentare Coriolis se poate explica astfel: chiar dacă mobilul s-ar mișca cu viteză relativă constantă față de SC mobil S' , față de SC fix S însă, vectorul \vec{v}_{rel} se rotește datorită rotației SC mobil, ceea ce dă o accelerație absolută suplimentară $\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} = \frac{1}{2} \vec{a}_{cor}$ (pe lângă \vec{a}_{rel} dacă \vec{v}_{rel} nu este constant față de S'). Cealaltă jumătate $\frac{1}{2} \vec{a}_{cor}$ provine din faptul că mobilul trece în mișcarea sa *relativă* (față de S') prin puncte-suport \vec{r}' avînd vitezele $\vec{v}_{rel} = \vec{\omega} \times \vec{r}'$ diferite, datorită variației lui \vec{r}' cu $d\vec{r}' = \vec{v}_{rel} dt$, ceea ce dă o accelerație absolută suplimentară $\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} = \frac{1}{2} \vec{a}_{cor}$ (pe lângă \vec{a}_{rel}), egală deci cu variația vitezei de transport datorită deplasării *mobilei față de S'* , pe lângă cea datorită mișcării lui S' însuși.

Exemple

1) Sistemul mobil S' în *rotație uniformă*, fără translație (alegem $\vec{r}_0 = 0$), deci $\vec{v}_0 = 0$, $\vec{\omega} = \text{const}$, $\dot{\vec{\omega}} = 0$.
Viteza de transport se reduce la \vec{v}_{rel} (deoarece $\vec{v}_0 = 0$):

$$\vec{v}_0 = \vec{\omega} \times \vec{r}' = \vec{v}_{rot} = \vec{\omega} \times \vec{r}'. \quad (9.16)$$

Acceleerația de transport se reduce la \vec{a}_o (deoarece $\vec{v}_o = 0$, $\vec{\omega} = \vec{\omega} = 0$):

$$\vec{a}_{tr} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{a}_o = \omega^2 R' \vec{n}' = \frac{v_o^2}{R'} \vec{n}'. \quad (9.17)$$

Să considerăm acum trei cazuri. Mobilul se mișcă *uniform* față de SC mobil: a) paralel cu $\vec{\omega}$, b) circular în jurul axei $\vec{\omega}$, c) radial față de S' (fig. 9.4–6).

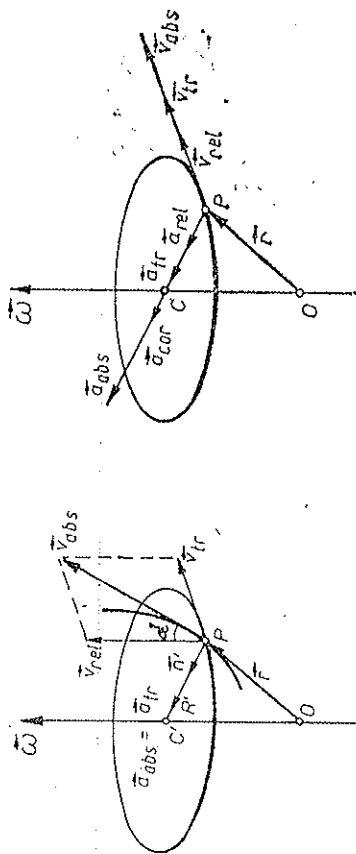


Fig. 9.4

Fig. 9.5

a) În acest caz (fig. 9.4): $\vec{a}_{rel} = 0$ deoarece \vec{v}_{rel} nu variază față de S' ; $\vec{a}_{cor} = 0$ deoarece \vec{v}_{rel} este paralel cu $\vec{\omega}$ și deci $\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} = 0$. Atunci \vec{a}_{abs} se reduce la \vec{a}_{tr} (9.17).

Mobilul descrie o elice înfășurată pe cilindrul de rază R' , avînd o mișcare elicoidală uniformă ($\vec{n}' = \vec{n}$ — versorul normalei principale la traiectoria absolută; $\vec{a}_{abs} = \vec{a}_n$ — accelerația normală la traiectoria absolută; $R'/\sin^2 \alpha = R$ — raza de curbura a traiectoriei absolute).

b) În acest caz (fig. 9.5): $\vec{a}_{rel} = \vec{n}' v_{rel}'/R'$, mișcarea fiind circulară uniformă și \vec{v}_{rel} varînd ca direcție:

$$\vec{a}_{abs} = \frac{v_{rel}^2}{R'} \vec{n}' + \frac{v_{rel}^2}{R'} \vec{n}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}. \quad (9.18)$$

$\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} = 2\omega v_{rel} \vec{n}'$ este centripetă.

Pe de altă parte, deoarece avem algebric $\vec{a}_{abs} = \vec{v}_{rel}' + \vec{v}_{tr}'$, rezultă direct:

$$\vec{a}_{abs} = \frac{v_{abs}^2}{R'} \vec{n}' = \left(\frac{v_{rel}^2}{R'} + \frac{v_{tr}^2}{R'} + \frac{2v_{rel}v_{tr}}{R'} \right) \vec{n}',$$

ceea ce coincide cu (9.18) deoarece

$$\vec{a}_{cor} = 2\omega v_{rel} \vec{n}' = \frac{2v_{rel}v_{tr}}{R'}. \quad (9.19)$$

Mobilul are o mișcare circulară față de ambele SC ($\vec{n}' = \vec{n}$, $R' = R$, $\vec{a}_{abs} = \vec{a}_n$).

Jumătate din accelerația Coriolis provine din faptul că vectorul \vec{v}_{rel} este rotit solidar cu S' , deci apare accelerația suplimentară $\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}$. Cealaltă jumătate a accelerației Coriolis provine din faptul că viteza de transport $\vec{v}_{tr} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times R' \vec{n}'$ variază datorită deplasării *relative*, față de S' , a mobilului, adică datorită variației lui

\vec{r} sau R' ; $\vec{r} = R' \vec{n}' = \vec{v}_{rel}$, deci apare accelerația suplimentară $\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}$ (viteza de transport este tangentă la cerc și schimbă direcția atunci cînd mobilul se deplasează pe cerc în mișcarea sa relativă).

c) În acest caz (fig. 9.6):

$$\begin{aligned} \vec{a}_{rel} &= 0, \quad \vec{a}_{tr} = \omega^2 R' \vec{n}', \quad \vec{a}_{cor} = \\ &= 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} \end{aligned} \quad (9.20)$$

(este tangențială).

Jumătate din accelerația Coriolis \vec{a}_{cor} provine din faptul că viteza relativă \vec{v}_{rel} este rotită solidar cu S' , iar cealaltă jumătate din faptul că mobilul în mișcarea sa *relativă* se depărtează de axă și ajunge în puncte cu alte viteze de transport \vec{v}_{tr} .

Mobilul descrie o spirală parcursă accelerat.

2) Sistemul mobil S' în *translație*, fără rotație: $\vec{\omega} = 0$. Atunci $\vec{\omega} = \vec{\omega} = 0$ și nu există accelerație Coriolis: $\vec{a}_{cor} = 0$,

$$\vec{a}_{abs} = \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{tr} = \vec{a}_{rel} + \vec{a}_o, \quad (9.21)$$

unde $\vec{a}_o = \vec{v}_o'$ este accelerația translației sistemului mobil. Prin urmare, în cazul *translației* reperului mobil legea de compunere a accelerațiilor este asemănătoare cu legea de compunere a vitezelor, fără al treilea termen (accelerația Coriolis fiind nulă).

Dacă SC mobil se mișcă *rectiliniu uniform* față de SC fix (translație uniformă), atunci $\vec{a}_o = 0$ și

$$\vec{a}_{abs} = \vec{a}_{rel}. \quad (9.22)$$

adică *accelerația unui punct material nu se schimbă atunci cînd trecem de la un SR dat la oricare altul, care se deplasează rectiliniu uniform față de primul*, sau altfel spus, accelerația este *invariantă* față de astfel de schimbări de SR, sau încă, *accelerația este aceeași față de toate SR care se află în translație uniformă unele față de altele*.

În particular, *mișcarea rectilinie uniformă* ($\vec{a} = 0$) într-un SR va fi tot *rectilinie uniformă* față de oricare alt SR care se deplasează *rectiliniu uniform* față de primul.

Dacă un SR este *inercial*, atunci toate SR în translație uniformă față de el vor fi de asemenea inerțiale și, reciproc, oricare două SR inerțiale se află în translație uniformă unul față de celălalt.

9.4. COMPUNEREA TRANSLAȚIILOR ȘI ROTAȚIILOR

Experiența arată că, dacă un mobil este solicitat la două mișcări, rezultatul final este același, indiferent dacă mișcările au loc simultan sau succesiv într-o ordine oarecare. Altfel spus, mișcările efectuate simultan de un mobil sînt independente una de alta. Acesta este *principiul independenței mișcărilor*, găsit și enunțat de Galilei.

Se spune că un rigid este animat de două mișcări simultane, dacă are o *mișcare relativă* (de translație și de rotație) față de un sistem de referință S' și o *mișcare de transport* (de translație și de rotație) solidară cu S' față de un sistem de referință fix S .

A compune cele două mișcări înseamnă a găsi *mișcarea absolută* (de translație și de rotație) a rigidului față de sistemul de referință fix S . Rezultatele de mai jos sînt valabile în mecanica nerelativistă.

Compunerea translațiilor finite sau infinitezimale se face după regula paralelogramului, deplasările fiind reprezentate prin vectori *liberi* corespunzători.

Compunerea rotațiilor $\vec{\omega}$ se reduce tot la regula paralelogramului (G. Coriolis), dar ținînd seama de *poziția* axelor de rotație, deoarece vectorii $\vec{\omega}$ nu sînt liberi, ci glisanți (alunecători).

Mai jos considerăm rotații infinitezimale sau rotații uniforme ($\vec{\omega} = \text{const.}$).

a) *Axe de rotație concurente.* Alegînd punctul de reducere (polul) în punctul de intersecție al axelor, avem

$$\vec{v} = \vec{\omega}_1 \times \vec{r} + \vec{\omega}_2 \times \vec{r} = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{r}, \quad (9.23)$$

adică se aplică direct regula paralelogramului (fig. 9.7).

b) *Deplasarea axei de rotație.* O deplasare *paralelă* a axei $\vec{\omega}$ cu segmentul \vec{b} generează o translație transversală $\vec{\omega} \times \vec{b}$ (fig. 9.8). În adevăr, alegînd polul în O' apare o translație suplimentară $\vec{\omega} \times \vec{b}$, egală cu viteza acestui punct, iar axa $\vec{\omega}$ se mută paralel în O' :

$$\vec{\omega} \times \vec{r} \equiv \vec{\omega}' \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \vec{b}, \quad (\vec{r}' = \vec{b} + \vec{r}). \quad (9.24)$$

Am folosit dealtfel această proprietate în cap. 7.

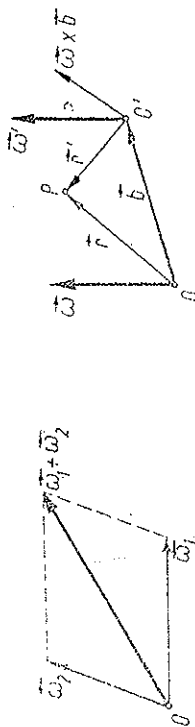


Fig. 9.7

Fig. 9.8

c) *„Cuplu” de rotații.* Două rotații egale în modul, cu axe paralele, dar de sens contrar ($\vec{\omega}, -\vec{\omega}$), dau o *translație* $\vec{b} \times \vec{\omega} = (-\vec{b}) \times (-\vec{\omega})$, perpendiculară pe planul lor și egală cu „momentul” cuplului (fig. 9.9). Această trans-

lație se obține deplasînd o axă peste cealaltă, conform regulei precedente.

Exemplu: mișcarea rezultantă de translație a pedalelor la o bicicletă.

d) *Axe de rotație paralele.* Deplasăm axele în punctul O' , definit prin raportul distanțelor sale pînă la axe:

$$b_1/b_2 = \omega_2/\omega_1, \quad (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 \neq 0), \quad (9.25)$$

interior sau exterior după cum vectorii $\vec{\omega}_{1,2}$ sînt paraleli sau antiparaleli (fig. 9.10). Translațiile generate astfel sînt de sensuri opuse și se anihilează, deoarece $\omega_1 b_1 = \omega_2 b_2$, și se obține o rotație pură $\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$ în O' (ca la compunerea forțelor paralele).

e) *Axe de rotație neconcurente.* Deplasăm înfi, paralel, una din axe pînă la intersecția ei cu cealaltă și le compunem acolo după regula paralelogramului; dar pînă această deplasare se generează o translație. Deplasăm apoi

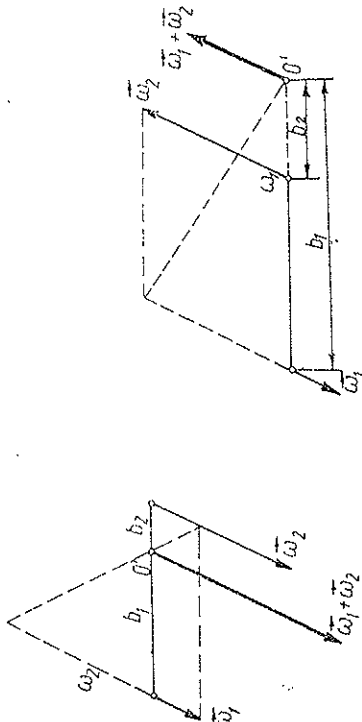


Fig. 9.10

vectorul obținut $\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$ pentru a anula componenta translației, transfer-sală pe $\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$; rezultă deci pînă la urmă o *mișcare elicoidală*. Invers, o *mișcare elicoidală poate fi descompusă în două rotații neconcurente* (analog reducerii unui sistem arbitrar de forțe aplicate rigidului la două forțe neconcurente).

Exemplu. Să considerăm mișcarea unei particule într-un plan. Introducem un sistem de coordonate S' cu aceeași origine $O' = O$ și cu axa „ Oy ” tînd permanent prin punctul P în care se află particula, cealaltă axă fiind perpendiculară „ Ox ” (fig. 9.11). Descompunerea pe aceste axe corespunde descompunerii în componentele radiale și transversale. Mișcarea particulei pe traiectoria sa absolută poate fi privită acum ca fiind compusă din mișcarea relativă rectilinie de-a lungul axei Ox — mișcarea radială, și o mișcare de transport de rotație, odată cu S' — mișcarea transversală.

Compunerea deplasărilor:

$$d\vec{r} = d\vec{r}' + r d\vec{\theta}, \quad d\vec{r}_{abs} = d\vec{r}, \quad d\vec{r}_{rel} = d\vec{r}', \quad d\vec{r}_{tr} = r d\vec{\theta},$$

de unde compunerea vitezelor:

$$\vec{v} = \vec{v}' + r\vec{\theta}, \quad \vec{v}_{abs} = \vec{v}_{rel} + \vec{v}_{tr}, \quad \vec{v}_{abs} = \vec{v}, \quad \vec{v}_{rel} = \vec{v}', \quad \vec{v}_{tr} = v_{tr} = r\vec{\theta} = v_{\theta}.$$

Componenta radială a vitezei $v_r = \dot{r}$ este viteza relativă, iar componenta transversală $v_{\theta} = r\dot{\theta}$ este viteza de transport.

Compuarea accelerațiilor:

$$\vec{a}_{\text{rel}} = \ddot{r}\vec{e}_r - \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \ddot{\theta}r\vec{e}_\theta - 2\dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \ddot{r}\vec{e}_r + 2\dot{\theta}\dot{r}\vec{e}_\theta + \ddot{\theta}r\vec{e}_\theta - \dot{\theta}^2 r\vec{e}_r$$

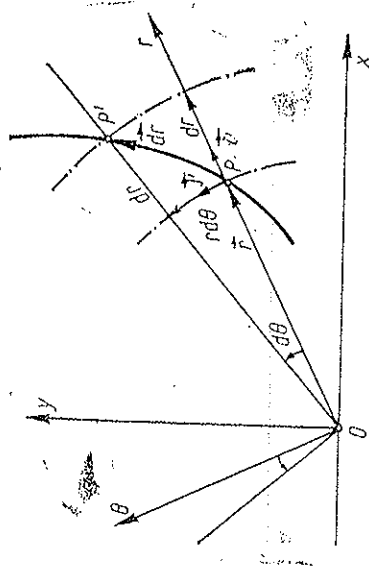


Fig. 9.11

deci

$$\vec{a}_{\text{abs}} = \vec{a}_{\text{rel}} + \vec{a}_{\text{tr}} + \vec{a}_{\text{cor}} = (\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta$$

unde la componenta radială $a_r = \ddot{r} - \dot{\theta}^2 r$ contribuie atât accelerația relativă cit și o parte din accelerația de transport, iar la componenta transversală $a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta}$ contribuie restul din accelerația de transport și accelerația Coriolis. Am reușit astfel formulele cunoscute pentru coordonate polare.

Observăm că accelerația transversală poate fi scrisă astfel:

$$a_\theta = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = \frac{1}{r} (r^2 \ddot{\theta})$$

PROBLEME

1. Un plan $Ox'y'$ se rotește în jurul originii O cu viteză unghiulară $\omega = \omega(t)$. Mișcarea unui punct față de acest plan mobil este dată de ecuațiile cinematice $x' = x'(t)$ și $y' = y'(t)$. Să se afle componentele accelerației absolute față de axele mobile $Ox'y'$.

$$\begin{aligned} a'_x &= \ddot{x}' - 2\omega\dot{y}' - \omega^2 x' - y'\dot{\omega} \\ a'_y &= \ddot{y}' + 2\omega\dot{x}' - \omega^2 y' + x'\dot{\omega} \end{aligned}$$

Decă punctul se mișcă de-a lungul axei Ox' : $y = \dot{y} = \ddot{y} = 0$ și reușim rezultatele de la exemplul precedent ($x' = r$, $\omega = \dot{\theta}$).

2. O particulă P pornește din vârful O al unui con de deschidere 2α și se mișcă uniform pe generatoarea conului cu viteză v . Conul însuși se rotește uniform în jurul axei sale cu viteză unghiulară ω (fig. 9.12). Să se afle mărimea accelerației absolute a punctului.

$$R. \quad a = v\omega \sin \alpha \sqrt{\omega^2 + 4}$$

3. Un tren (sau vapor) se mișcă cu viteză v de-a lungul meridianului. Să se afle accelerația absolută a trenului în funcție de latitudinea φ .

$$R. \quad a = \frac{1}{R} (v^4 + 2\omega^2 R^2 (1 + \sin^2 \varphi) v^2 + R^4 \omega^4 \cos^2 \varphi)^{1/2}$$

4. Un corp se rotește în jurul unei axe orizontale Ox cu accelerația unghiulară constantă ϵ_1 . La rândul său axa Ox se rotește în jurul unei axe verticale fixe Oy cu accelerația unghiulară constantă ϵ_2 . Să se afle viteza unghiulară a rotației rezultante, dacă inițial corpul era în repaus. Care sînt axoidele?

R. $\omega = \sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2} \cdot t$; axoidele sînt două conuri circulare cu axele Ox , y și generatoarea comună sub unghiul $\arctg \epsilon_2/\epsilon_1$.

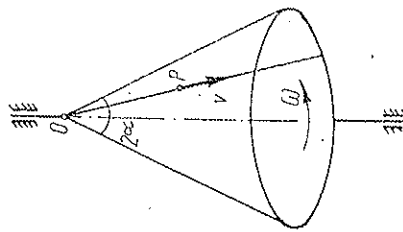


Fig. 9.12

5. Să se compună rotațiile din fig. 9.13.

R. Mișcarea elicoidală: $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$, $v = -\frac{\omega_1 \omega_2 c}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}$; axa elicoidală trece prin $(0, 0, \frac{\omega_1 \omega_2 c}{\omega_1^2 + \omega_2^2})$.

6. Două rigide se rotesc uniform cu vitezele unghiulare $\omega_{1,2}$ respectiv în jurul axelor fixe Ox , y . Să se calculeze viteza unghiulară și accelerația unghiulară ale rigidului 1 față de rigidul 2.

$$\begin{aligned} R. \quad \vec{\omega}_{rel} &= \vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2, \quad \vec{\omega}_{rel} = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} \\ \vec{\epsilon}_{rel} &= -\vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_{rel} = -\omega_2 \times \omega_1, \quad \epsilon_{rel} = \omega_1 \omega_2 \end{aligned}$$

Fig. 9.13

$$\vec{F}_{\text{cor}}^{\text{def}} = -m\vec{a}_{\text{cor}} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{rel}}, \quad (10.6)$$

unde \vec{F}_u este forța complementară de transport și \vec{F}_{cor} este forța complementară Coriolis.

b) Conform principiului III, forței \vec{F} aplicate corpului i se opune forța reciprocă $\vec{F}' = -\vec{F}$ exercitată de corp asupra „legăturilor” (firelor, barelor etc. care trag sau împing corpul), adică asupra celorlalte corpuri cu care el interacționează. Forța reciprocă (de reacțiune) \vec{F} se datorește inerției corpului: corpul se opune forței \vec{F} care îi imprimă accelerația \vec{a}_{bs} :

$$\vec{F}' = -\vec{F} = -m\vec{a}_{\text{bs}} = \vec{F}_e - m\vec{a}_{\text{rel}} = \vec{F}_e + \vec{F}_c, \quad (10.7)$$

unde

$$\vec{F}_c' = -m\vec{a}_{\text{rel}} \quad (10.8)$$

se poate numi forță complementară „relativă”. Prin urmare, forța reciprocă \vec{F}' , reală, exercitată de corpul accelerat, datorită inerției sale, asupra legăturilor, adică asupra corpurilor care-l accelerează, este echivalentă cu rezultanta tuturor forțelor complementare fictive $\vec{F}_e + \vec{F}_c'$, presupusă aplicată corpului însuși în reperul *neinerțial*. Forța reală, $\vec{F} = -\vec{F}'$, aplicată legăturilor, a fost numită de Newton *forță de inerție* (fiindcă se datorește inerției corpului). Prin extensiune (nepotrivită), forțele fictive complementare (presupuse aplicate corpului în reperul *neinerțial*), echivalente cu forțele reale de inerție newtoniene, au fost numite tot forțe de inerție.

c) În particular, dacă asupra corpului nu acționează nici o forță reală ($\vec{F} = 0$, $\vec{a}_{\text{bs}} = 0$), el se va mișca *totuși accelerat față de reperul neinerțial* (sub acțiunea forței complementare \vec{F}_c):

$$\vec{a}_{\text{bs}} = 0, \quad \vec{a}_{\text{rel}} = -\vec{a}_u - \vec{a}_{\text{cor}}, \quad (10.9)$$

$$\vec{F} = 0, \quad \vec{F}_c = -m\vec{a}_u - m\vec{a}_{\text{cor}} = m\vec{a}_{\text{rel}}, \quad \vec{F}_e + \vec{F}_c' = 0. \quad (10.10)$$

Forțele complementare își fac echilibrul și forța de inerție newtoniană nu există.

d) O categorie importantă de SR sînt SR *proprii* ale corpului sau SR care se mișcă *rectiliniu uniform* față de SR proprii. În astfel de SR corpul este evident în repaus (SR proprii) sau se mișcă rectiliniu uniform ($\vec{a}_{\text{rel}} = 0$), *deși acționează o forță reală \vec{F}* . În acest caz ecuația (10.3) devine

$$\vec{F} + \vec{F}_e = 0, \quad (\vec{a}_{\text{rel}} = 0), \quad \vec{F}_c = -\vec{F} = -m\vec{a}_{\text{bs}} = \vec{F}', \quad (10.11)$$

adică forța complementară \vec{F}_c este egală în modul și de sens opus cu forța reală \vec{F} , deci este echivalentă cu forța de inerție newtoniană aplicată legăturilor. În acest caz, rezultanta forțelor reale \vec{F} aplicate este în „echilibru” cu forța complementară \vec{F}_c . În general însă, într-un reper *neinerțial* careare

$$\vec{F} + \vec{F}_e + \vec{F}_c' = 0, \quad (10.12)$$

CAPITOLUL 10

DINAMICA MIȘCĂRILOR RELATIVĂ ȘI ABSOLUTĂ. SISTEME DE REFERINȚĂ NEINERȚIALE

Legile mecanicii clasice newtoniene sînt valabile față de SR *inerțiale* (în mișcare rectilinie uniformă față de stele și nebuloase). Față de SR *neinerțiale* (care se mișcă accelerat față de stele „fixe”) legea inerției și legea fundamentală nu sînt valabile; corpurile nesupuse la forțe se mișcă accelerat, iar corpurile supuse la forțe se pot afla în repaus (relativ). Experiențe mecanice efectuate într-un laborator *neinerțial* ne permit să determinăm accelerația sa față de SR *inerțiale* (față de stele). (Apare totuși o dificultate legată de câmpul gravitațional de care vom vorbi mai departe.)

10.1. FORȚELE COMPLEMENTARE

a) Fie mișcarea punctului material raportată la un SR *neinerțial* S' , față de care accelerația este \vec{a}_{rel} . Atunci,

$$\vec{a}_{\text{bs}} = \vec{a}_{\text{rel}} + \vec{a}_u + \vec{a}_{\text{cor}}, \quad (10.1)$$

de unde înmulțind cu masa:

$$\vec{F} = m\vec{a}_{\text{bs}} = m\vec{a}_{\text{rel}} + m\vec{a}_u + m\vec{a}_{\text{cor}}, \quad (10.2)$$

$$\vec{F} - m\vec{a}_u - m\vec{a}_{\text{cor}} = m\vec{a}_{\text{rel}} \quad \text{sau} \quad \vec{F} + \vec{F}_e = m\vec{a}_{\text{rel}}. \quad (10.3)$$

Prin urmare, într-un SR *neinerțial*, în legea fundamentală trebuie adăugată la forța reală \vec{F} , o forță fictivă \vec{F}_e numită *forță complementară* sau pseudo-forță (sau forță aparentă) (numită, impropriu, și forță de inerție):

$$\vec{F}_e^{\text{def}} = -m\vec{a}_u - m\vec{a}_{\text{cor}} = \vec{F}_u + \vec{F}_{\text{cor}}, \quad (10.4)$$

$$\vec{F}_u^{\text{def}} = -m\vec{a}_u = -m\vec{a}_0 - m\vec{a}_e - m\vec{a}_\omega = -m\vec{a}_0 - m\vec{e} \times \vec{v}' -$$

$$-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'), \quad (10.5)$$

adică rezultanta forțelor reale aplicate, \vec{F} , este în „echilibru” cu rezultanta tuturor forțelor complementare

$$\vec{F}_c + \vec{F}'_c = -m\vec{a}_{abs} = -\vec{F} = \vec{F}' \quad (10.13)$$

și rezultanta tuturor forțelor complementare $\vec{F}_c + \vec{F}'_c$ este echivalentă cu forța de inerție newtoniană aplicată legăturilor (10.7). Problema de dinamică se reduce astfel „formal” la o problemă de statică (metoda cinetostatică). Prin urmare, numai în SR proprii (când $\vec{a}_{rel} = 0$, $\vec{F}'_c = 0$), forța complementară fictivă \vec{F}_c aplicată corpului este echivalentă cu forța reală de reacțiune $\vec{F}' = -\vec{F}$ aplicată legăturilor, adică cu forța de inerție newtoniană; altfel $\vec{F}' = \vec{F}_c + \vec{F}'_c$.

e) Subliniem că forțele complementare (10.5) sînt forțe *fictive* (în cadrul mecanicii newtoniene) care trebuie adăugate la forțele reale pentru a asigura valabilitatea ecuației fundamentale a dinamicii în SR *neinerțial* considerat. Ele *nu sînt forțe de interacțiune*, nu putem indica corpul care le-ar exercita, de aceea *nu li se aplică nici principiul III al forțelor reciproce*. Deși pentru observatorul inerțial forțele complementare nu există, pentru observatorul neinerțial ele apar ca forțe reale, *indiscernabile* în cadrul restrîns al laboratorului său (adică prin mijloace *locale*) de forțele gravitaționale, fiind aplicate fiecărui punct material și proporționale cu masele acestora, ca și forțele gravitaționale.

Aplicații

a) Într-un vagon mișcat accelerat se află o bilă nedeșă de masă m , așezată pe o masă nedeșă fără frecare și prinsă cu un resort-dinamometru de peretele anterior al vagonului (fig. 10.1).

Pentru observatorul terestru S bila se mișcă cu accelerația $\vec{a} = \vec{a}_{abs}$, ca și vagonul, fiind trasă de forța $\vec{F} = m\vec{a}$, careia i se opune reacțiunea bilei (forța de inerție newtoniană) $\vec{F}' = -\vec{F} = -m\vec{a}$, aplicată resortului.

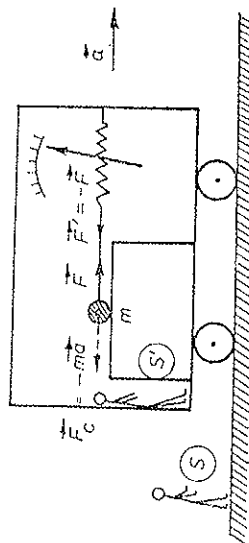


Fig. 10.1

Pentru observatorul S' legat de vagon, bila este în repaus, deși este trasă de forța \vec{F} indicată de dinamometru, deci legea II nu e valabilă pentru el. Adăugînd însă forța complementară fictivă $\vec{F}_c = \vec{F}'_c = \vec{F}' = -m\vec{a}$ pentru el, aplicată bilei, obținem rezultantă nulă: $\vec{F} + \vec{F}_c = 0$ și explicăm astfel echilibrul bilei și înținderea resortului. Forța complementară \vec{F}_c este echivalentă în cazul nostru (S' este propriu) cu forța de inerție newtoniană \vec{F}' aplicată resortului.

Tîind firul, bila se va mișca rectiliniu uniform pentru observatorul terestru S , în virtutea inerției, nefiind trasă de nici o forță. Pentru observatorul S' însă, bila se va mișca cu accelerația $\vec{a}_{rel} = -\vec{a}$ față de vagon, și pentru a explica această mișcare accelerată trebuie introdusă forța complementară fictivă $\vec{F}_c = m\vec{a}_{rel} = -m\vec{a} = -\vec{F}'_c$, careia însă nu-i mai corespunde acum o forță reală, echivalentă, de reacțiune inerțială (forță de inerție) asupra legăturilor (S' nefiind propriu, $\vec{a}_{rel} \neq 0$, $\vec{F}'_c = \vec{F}_c + \vec{F}'_c = 0$ și nu există forță de inerție newtoniană).

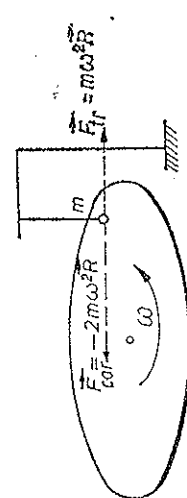


Fig. 10.2

b) Fie acum o platformă în mișcare de rotație uniformă cu viteza unghiulară ω în jurul unei axe verticale. O bilă nedeșă pusă pe podeaua nedeșă fără frecare a platformei sau suspendată pe Pămînt în dreptul marginii platformei (fig. 10.2), rămîne în repaus față de Pămînt ($\vec{F} = m\vec{a}_{abs} = 0$), însă iese în mișcare circulară ($-\omega$) față de vagon. Pentru a explica aceasta în reperul S' legat de platformă, introducăm forța complementară fictivă aplicată bilei:

$$\vec{F}_c = -m\vec{a}_{tr} - m\vec{a}_{cor},$$

$$\vec{a}_{tr} = \omega^2 R \vec{n} \text{ (centripetă)}, \quad \vec{F}_{tr} = -m\omega^2 R \vec{n} \text{ (centrifugă)}, \quad (10.14)$$

$$\vec{a}_{cor} = -2\omega v_{\theta} \vec{n} = -2\omega^2 R \vec{n} \text{ (centrifugă)}, \quad \vec{F}_{cor} = 2m\omega^2 R \vec{n} \text{ (centripetă)};$$

$$\vec{F}_c = m\omega^2 R \vec{n} = m\vec{a}_{tr} \text{ (centripetă)}. \quad (10.15)$$

Acestei forțe complementare \vec{F}_c nu-i corespunde nici-o forță reală, echivalentă, aplicată legăturilor, S' nefiind propriu pentru bila (nu există forță de inerție newtoniană, $\vec{F}' = \vec{F}_c + \vec{F}'_c = 0$).

Dacă acum bila este legată de centru printr-un fir cu resort-dinamometru și se află în repaus față de platformă (fig. 10.3), atunci față de Pămînt bila are o mișcare circulară uniformă (ω) produsă de forța centripetă dată de resort (fig. 10.3):

$$\vec{F} = m\vec{a}_{abs} = m\omega^2 R \vec{n} = m\vec{a}_{tr}. \quad (10.16)$$

Datorită inerției, bila reacționează asupra resortului cu forța centrifugă de inerție:

$$\vec{F}' = -\vec{F} = -m\vec{a}_{tr} = -m\omega^2 R \vec{n}. \quad (10.17)$$

Față de platformă însă, bila e în repaus deși este trasă de forța centripetă \vec{F} a resortului. Pentru a explica echilibrul în S' introducăm forța complementară fictivă aplicată bilei, care să compenseze forța resortului \vec{F} :

$$\vec{F}_c = \vec{F}' = -m\vec{a}_{tr} = -m\omega^2 R \vec{n} = -m\vec{a}_{tr} = -\vec{F}. \quad (10.18)$$

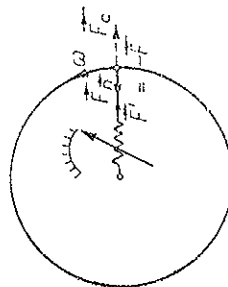


Fig. 10.3

Reperul S' fiind acum propriu, forța complementară \vec{F}_c este echipolentă cu forța de inerție centrifugă aplicată resortului.

c) Fie o platformă în rotație uniformă cu viteza unghiulară ω în jurul axei verticale centrale. La marginea platformei este suspendat un corp (fig. 10.4).

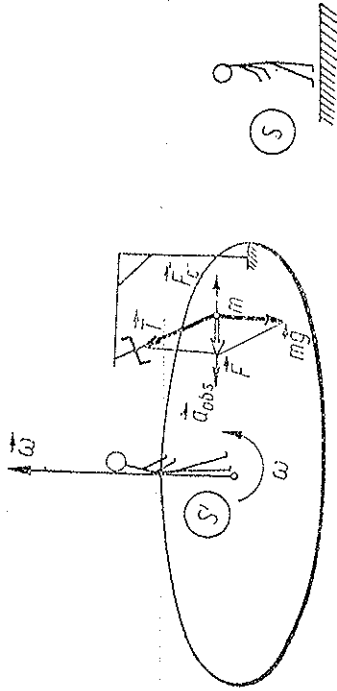


Fig. 10.4

Pentru observatorul terestru S corpul este supus la forța de greutate $m\vec{g}$ și tensiunea din fir \vec{T} a căror rezultantă \vec{F} este centripetă și explică mișcarea circulară uniformă a corpului:

$$\vec{F} = m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}_{abs} = m\omega^2 R\vec{n}. \quad (10.19)$$

Pentru observatorul S' legat de platformă corpul este în repaus ($\vec{a}_{rel} = 0$) deși este supus la forța centripetă $\vec{F} = m\vec{g} + \vec{T}$. Cum explică observatorul S' deviația firului de suspenzie și echilibrul relativ al corpului? — Introducând forța complementară

$$\vec{F}_c = -m\vec{a}_{rel} = -m\omega^2 R\vec{n} \quad (\text{centrifugă}), \quad (10.20)$$

obținem echilibrul relativ:

$$\vec{F} + \vec{F}_c = 0, \quad (\vec{a}_{rel} = 0). \quad (10.21)$$

Reperul S' fiind propriu, forța complementară

$$\vec{F}_c = -\vec{F} = -m\vec{a}_{abs} \quad (10.22)$$

este echipolentă cu forța de inerție newtoniană aplicată firului ($-\vec{T}$) și Pământului ($-m\vec{g}$). Pentru observatorul S' corpul este în echilibru sub acțiunea celor 3 forțe: $m\vec{g}$, \vec{T} și \vec{F}_c .

10.2. VERTICALA TERESTRĂ (FIRUL CU PLUMB)

În SR legat de Pământ trebuie introdusă forța complementară legată de rotația diurnă a Pământului:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \cdot 3,14}{86\,400} = 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}, \quad (10.23)$$

$$\vec{a}_{tr} = \omega^2 R \cos \varphi \cdot \vec{n}', \quad \vec{a}_{cor} = 2\omega \times \vec{v}_{rel}, \quad (10.24)$$

$$\vec{F}_c = -m\omega^2 R \cos \varphi \cdot \vec{n}' - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}. \quad (10.25)$$

În particular, direcția firului cu plumb (direcția verticalei terestre) nu coincide cu direcția razei terestre (fig. 10.5).

În adevăr, asupra corpului acționează forța de atracție gravitațională $\vec{G}_0 = m\vec{g}_0$ după direcția razei terestre și forța de tensiune \vec{T} a firului de suspenzie (sau reacțiunea normală a planului orizontal pe care este așezat corpul). În SC heliocentric (inerțial) S avem (φ — latitudinea):

$$\vec{G}_0 + \vec{T} = m\vec{a}_{abs} = m\omega^2 R \cos \varphi \cdot \vec{n}'. \quad (10.26)$$

În SC terestru S' , trebuie adăugată forța complementară \vec{F}_c care se reduce la \vec{F}_t ($\vec{F}_{cor} = 0$, deoarece $\vec{v}_{rel} = 0$):

$$\begin{aligned} \vec{G}_0 + \vec{T} + \vec{F}_c &= m\vec{a}_{rel} \quad \text{dar} \quad \vec{a}_{rel} = 0, \\ \vec{F}_c &= -m\vec{a}_{tr} = -m\omega^2 R \cos \varphi \cdot \vec{n}' \quad (\text{centrifugă}), \end{aligned} \quad (10.27)$$

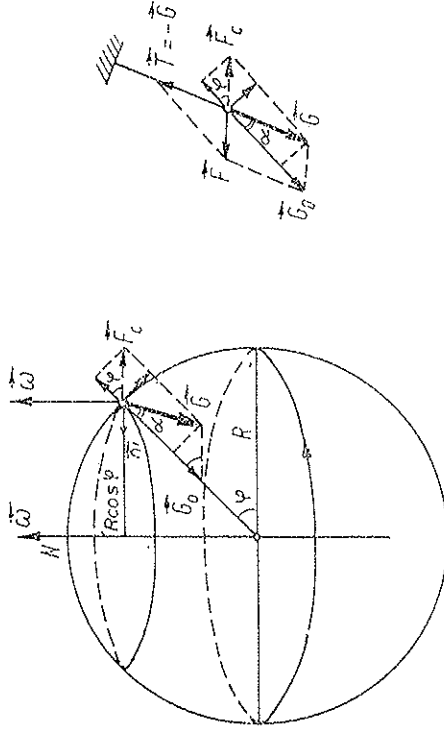


Fig. 10.5

$$\vec{G}_0 + \vec{T} - m\omega^2 R \cos \varphi \cdot \vec{n}' = 0, \quad (10.28)$$

ceea ce evident coincide cu (10.26). Forța de greutate rezultantă va fi:

$$\vec{G} = -\vec{T} = m\vec{g} = \vec{G}_0 + \vec{F}_c = m\vec{g}_0 - m\omega^2 R \cos \varphi \cdot \vec{n}', \quad (10.29)$$

$$\vec{g} = \vec{g}_0 - \omega^2 R \cos \varphi \cdot \vec{n}; \quad (10.30)$$

$$G = mg = \frac{G_0 - F_c \cos \varphi}{\cos \alpha} \approx G_0 - F_c \cos \varphi = mg_0 - m\omega^2 R \cos^2 \varphi, \quad (10.31)$$

(unghiul α este foarte mic, $\cos \alpha \approx 1$);

$$G = G_0 \left(1 - \frac{\omega^2 R}{g_0} \cos^2 \varphi \right) = G_0 \left(1 - \frac{1}{289} \cos^2 \varphi \right); \quad (10.32)$$

Componenta orizontală a lui \vec{F}_c îndreptată spre ecuator explică și turtirea Pământului la Poli (umflarea la Ecuator). Ținând seama și de efectul turtirii Pământului rezultă global, la nivelul mării:

$$G = G_0 \left(1 - \frac{1}{191} \cos^2 \varphi \right) \text{ sau } g = g_0 \left(1 - \frac{1}{191} \cos^2 \varphi \right), \quad (10.33)$$

unde G_0 și $g_0 = 9,832 \text{ m/s}^2$ sînt valori la Pol.

Abaterea direcției forței de greutate (a firului cu plumb) de la raza terestră va fi (fig. 10.5):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_c \sin \varphi}{G_0 - F_c \cos \varphi} \approx \frac{m\omega^2 R \cos \varphi \sin \varphi}{G_0}, \quad (10.34)$$

$$\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha = \frac{\omega^2 R}{2g_0} \sin 2\varphi, \quad (10.35)$$

deviația este nulă la Poli și Ecuator, și maximă la paralela $\varphi = 45^\circ$ ($\alpha \approx 11'$).

10.3. LEGEA LUI BĂR

Fie mișcarea unui tren sau curgerea unui râu de-a lungul unui meridian spre Nord, în emisfera nordică. Atunci în afară de efectul micșorării greutatea de mai sus, avem și forța complementară Coriolis aplicată marelui (fig. 10.6)

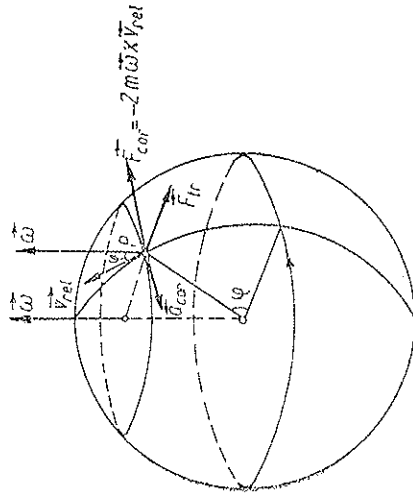


Fig. 10.6

$$\vec{F}_{cor} = -m\vec{a}_{cor} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}, \quad F_{cor} = 2m\omega v_{rel} \sin \varphi, \quad (10.36)$$

dirijată spre Est (de-a lungul paralelei). O forță de reacțiune echivalentă se aplică Pământului: $\vec{F}' = \vec{F}_{cor}$ (celelalte forțe \vec{F}_g , \vec{F}_c sînt în planul meridian). Așa se explică uzura șinei drepte la CF duble sau săparea malurilor drepte la râuri, în emisfera nordică (*legea lui Băr*, descoperită la riurile siberiene).

Pentru observatorul solar nu există forță Coriolis și fenomenul se explică prin faptul că mergînd spre Nord, apa sau trenul se apropie de axa de rotație a Pământului, adică se deplasează mereu spre regiuni unde viteza liniară de transport, tangentă la paralela terestră, este tot mai mică, deci vine cu un surplus (exces) de viteză spre răsărit și lovește malul răsăritean (în emisfera nordică).

În emisfera sudică se uzează șina stînga și se sapă malul stîng la râuri.

În cazul mișcării de-a lungul unei paralele spre Est (sau Vest) apare o micșorare (respectiv, creștere) a greutateii corpului și de asemenea uzura șinei drepte la CF duble sau săparea malului drept la râuri, în emisfera nordică (fig. 10.7).

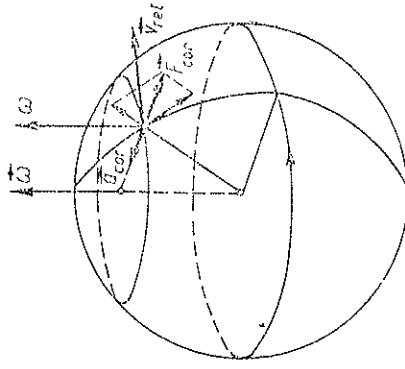


Fig. 10.7

10.4. CĂDEREA LIBERĂ

Dacă un corp cade liber (în vid), accelerația sa relativă față de Pământ va fi:

$$\begin{aligned} \vec{a}_{rel} &= \vec{a}_{abs} - \vec{a}_t - \vec{a}_{cor} = \vec{g}_0 - \\ &- \omega^2 R \cos \varphi \cdot \vec{n} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} = \\ &= \vec{g} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}. \end{aligned} \quad (10.37)$$

Alegem un SC cu axa Ox spre Est, Oy spre Nord și Oz verticală în sus, în emisfera nordică (omitem accentul la coordonatele relative) (fig. 10.8):

$$\vec{v}_{rel} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \approx (0, 0, \dot{z}), \quad (10.38)$$

$$\vec{a}_{rel} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}) = \vec{g} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}, \quad (10.39)$$

$$\vec{\omega} = (0, \omega \cos \varphi, \omega \sin \varphi), \quad (10.40)$$

$$\vec{g} = (0, -g \sin \alpha, -g \cos \alpha) \approx$$

$$\approx (0, 0, -g), \quad (10.41)$$

unde am pus $\alpha = 0$, deoarece α este foarte mic, și $\dot{x} = \dot{y} = 0$ deoarece viteza orizontală de deviere este neglijabilă față de viteza verticală de cădere:

$$\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \omega \cos \varphi & \omega \sin \varphi \\ 0 & 0 & \dot{z} \end{pmatrix} =$$

$$= (\dot{z}\omega \cos \varphi, 0, 0), \quad (10.42)$$

astfel încît (10.39) dă pe componente:

$$\ddot{x} = -\dot{z}\omega \cos \varphi, \quad \ddot{y} = 0, \quad \ddot{z} = -g \quad (10.43)$$

cu condițiile inițiale:

$$t = 0, \quad \vec{r} = (0, 0, h), \quad \vec{v}_{rel} = (0, 0, 0),$$

adică corpul cade de la înălțimea h cu viteză inițială nulă.

Integrarea succesivă dă (considerăm g practic constant):

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= 0, & \dot{z} &= -gt, & \dot{x} &= g^2 \omega \cos \varphi, \\ x &= \frac{1}{3} g^2 \omega \cos \varphi, & y &= 0, & z &= h - \frac{1}{2} g t^2.\end{aligned}\quad (10.44)$$

Prin urmare corpul deviază spre răsărit (în emisfera nordică), adică în sensul forței Coriolis $\vec{F}_{cor} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}$. Devierea totală la sfârșitul căderii va fi:

$$x_m = \frac{2}{3} h \sqrt{\frac{2h}{g}} \omega \cos \varphi, \text{ după } t_m = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (10.45)$$

De exemplu, pentru $h = 1000$ m, $\varphi = 45^\circ$ rezultă $x_m \approx 40$ cm.

Experiențele (de exemplu, Reich 1831) confirmă această abatere și deci rotația Pământului.

Pentru observatorul solar, corpul, avînd inițial o viteză de transport tangențială de-a lungul cercului paralel, coboară spre Pământ unde această viteză este mai mică (se apropie de axa de rotație a Pământului S—N), deci vine cu o viteză mai mare spre răsărit, deci cade deviat spre răsărit.

10.5. PENDULUL FOUCAULT

O altă experiență celebră este rotația planului de oscilație al unui pendul (Foucault 1850 și alte experiențe anterioare). Pentru oscilații mici, mișcarea corpului se face practic în planul orizontal. Atunci forța Coriolis $-2m\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}$ deviază corpul mereu spre dreapta, astfel încît el descrie o rozetă (fig. 10.9):

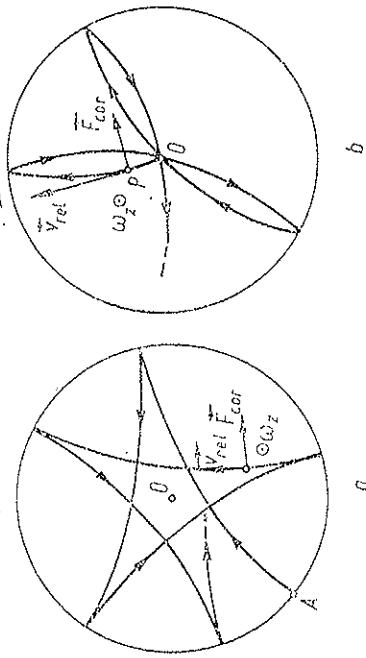


Fig. 10.9

a — pendulul pleacă din poziția deviată A fără viteză inițială;
b — pendulul pleacă din O cu viteză inițială).
Componenta verticală $\omega_z = \omega \sin \varphi$ rotește planul orizontal (podeaua laboratorului) în jurul verticalei cu perioada

$$T_z = 2\pi/\omega_z = T/\sin \varphi, \quad (T = 24 \text{ h}) \quad (10.46)$$

în sens trigonometric, de aceea planul de oscilație a pendulului se rotește aparent în sens contrar, adică în sensul acelor unui ceasornic, cu această perioadă. Tot astfel sînt deviate spre dreapta corpurile care se mișcă în planul orizontal pe suprafața Pământului, în emisfera nordică.

Componenta orizontală $\omega_y = \omega \cos \varphi$ rotește planul meridian vertical $S - N$ (peretele S—N al laboratorului) în jurul orizontalei S—N cu perioada

$$T_y = 2\pi/\omega_y = T/\cos \varphi \quad (10.47)$$

și explică abaterea spre Est a corpurilor în căderea liberă (în emisfera nordică).

Prin urmare, cu ajutorul unor experiențe mecanice locale, efectuate într-un laborator pe Pământ, se poate dovedi rotația Pământului față de SC astronomic inerțial.

Observație. Experiențe cu pendulul au fost efectuate pentru prima dată de Viviani la Florența în 1661, apoi de Bartholini în 1833. Jean Bernard Léon Foucault (1819—1868) a efectuat experiențele sale (fără să cunoască experiențele precedente) la Paris în 1850—1851. Lungimea firului de suspensie 67 m, sferă de cupru de 28 kg, perioadă de oscilație peste 16 s (suspensie specială a firului pentru a nu se torsiona).

La sediul Națiunilor Unite din New-York există un pendul din sferă aurită de 91 kg legată de tavan la înălțimea de 7,6 m deasupra podelei vestibulului. Firul de suspensie este din oțel inoxidabil și permite oscilații libere (fără torsionare). Sfera oscilează imediat deasupra unui inel metalic cu diametrul de 1,8 m ridicat deasupra podelei. Perioada de rotație a planului de oscilație 36 h 45 min.

Aplicație

a) Fie un pendul elastic cu resort-spirală (analog celui fixat la acul unui ampermetru), ca în figura 10.10, așezat orizontal pe o platformă care se poate roti în jurul axei sale verticale.

În SC propriu (ales ca în fig. 10.11) trebuie introduse forțe de transport $-m_s \vec{a}_z$ care dau o rezultantă și un cuplu. Față de CM avem (6.99) și (6.100). Dar să facem acum reducerea față de punctul O ; atunci rezultanta se deplasează echivalent în O , iar cuplul se schimbă cu momentul rezultantei din CM față de O .

$$\text{Rezultanta: } \vec{F}'_e = -m \vec{a}_{cm}$$

$$F'_z = m\omega^2(R - R_0),$$

$$F'_y = -m\varepsilon(R - R_0). \quad (10.48)$$

$$\begin{aligned}\text{Cuplul: } \vec{M}'_e &= (I'_{yz}\omega^2 - I'_{zz}\varepsilon; \\ &- I'_{xz}\omega^2 - I'_{yz}\varepsilon; \\ &- I'_{zx}\varepsilon + m\varepsilon(R - R_0)R_0),\end{aligned}$$

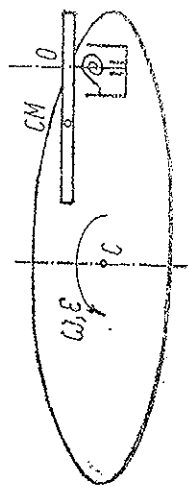


Fig. 10.10

de unde momentul în raport cu axa de rotație din O a pendulului:

$$M''_{||} = m\varepsilon(R - R_0)R_0 - I'_{\phi\varepsilon} = m\varepsilon R R_0 - I'_{\varepsilon}, \quad (10.49)$$

unde I' este momentul de inerție al pendulului față de axa sa de rotație (iar I'_0 față de axa Oz').

Dacă platforma se rotește *uniform* ($\varepsilon = 0$) acest cuplu este nul și deci pendulul rămâne în echilibru (față de platformă) orientat permanent spre *centrul* platformei, așa cum a fost potrivit de la început (echilibrul va fi stabil dacă resortul este suficient de puternic și rotația platformei nu este prea rapidă). Lucrul era de așteptat întrucât în acest caz avem forțe de transport numai centrfuge, fără componente transversale pe pendul.

Dacă însă platforma se rotește *neuniform* ($\varepsilon \neq 0$), atunci pendulul se va roti imediat față de platformă, sub acțiunea cuplului (10.49). Și totuși putem construi pendulul în așa fel încât să rămână *insensibil* la orice *acelerație unghiulară* a platformei! (adică oricum am roti platforma într-un sens sau altul). Condiția necesară rezultă din anularea momentului față de axa de rotație (10.49):

$$I'_0 = mR_0(R - R_0) \quad \text{sau} \quad I' = mR_0R. \quad (10.50)$$

Or, aceasta nu este altceva decât condiția (6.103):

$$R = R_0 + I'_0/mR_0 = I'/mR_0 = l_r, \quad (10.50')$$

adică O și C sînt puncte reciproce: centru de oscilație — centru de suspensie, distanța dintre ele fiind lungimea redusă a pendulului.

Exemplu. Tijă subțire omogenă: $I'_0 = \frac{1}{12} ml^2$ și (10.50') dă $l^2 = 12R_0(R - R_0)$. Pentru o distanță $R = 0,50$ m și o tijă $l = 0,50$ m, rezultă $R_0 = 13$ cm.

b) Fie acum într-o cabină a unui avion un pendul fizic suspendat printr-o articulație, astfel încît axa O — CM să fie *axă de simetrie*, deci automat principală centrală și de asemenea orice axă centrală transversală va fi principală.

Dacă avionul stă în repaus pe suprafața Pămîntului sau se mișcă cu viteză constantă de-a lungul unui cerc paralel sau unui meridian sau chiar de-a lungul oricărui cerc mare, pendulul va rămîne în echilibru față de cabină și va fi orientat spre centrul Pămîntului, adică va indica *verticală terestră* (sau respectiv *orizontul terestru*).

În adevăr, situația este analogă problemei precedente, numai că rolul momentului de restabilire elastic al resortului spiralat îl joacă acum câmpul gravitațional terestru \vec{g} și deoarece axele $Ox'y'z'$ sînt principale centrale, cuplul (10.48) va fi nul ($\varepsilon = 0$).

Dacă însă avionul va zbura accelerat pe suprafața Pămîntului, atunci pendulul va devia imediat, așa cum știm foarte bine despre obiectele suspendate într-un vehicul care accelerează, înțează sau virează.

Și acum vine ideea ingenioasă de a proiecta pendulul astfel încît să fie *insensibil* la orice mișcare accelerată la suprafața Pămîntului, adică să

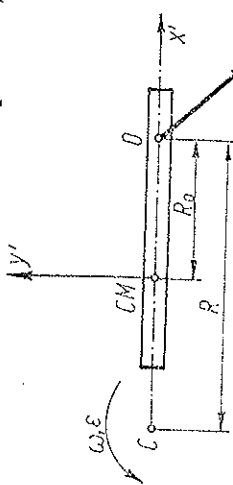


Fig. 10.11

arete permanent verticală terestră sau orizontul terestru. Condiția este exact aceeași ca la problema precedentă:

$$I'_0 = mR_0(R - R_0) \quad \text{sau} \quad I' = mR_0R, \quad \text{unde } R \cong R_p = 6400 \text{ km}. \quad (10.51)$$

Deci lungimea redusă a pendulului trebuie să fie $R \cong R_p$. Atunci perioada de oscilație:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I'}{mgR_0}} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} = 1 \text{ h } 25 \text{ min}. \quad (10.52)$$

Pentru o tijă omogenă rezultă condiția

$$l_r = R = R_0 \pm l^2/12R_0, \quad R_0 = \frac{R}{2} \pm \frac{l^2}{2} \sqrt{1 - \frac{l^2}{3R^2}} \approx \frac{l^2}{12R},$$

ceea ce practic este irealizabil. Și totuși problema a fost rezolvată cu ajutorul *giroscopului* avînd perioada de precese (10.52).

Mai mult, o accelerație arbitrară a avionului se descompune într-o componentă orizontală și una verticală. Deoarece accelerația verticală nu influențează pendulul nostru, înseamnă că pentru orice mișcare accelerată a avionului, pendulul astfel construit va indica mereu verticala terestră sau orizontul artificial (în condițiile de zbor fără vizibilitate).

PROBLEME

1. Într-un tub orizontal care se rotește uniform cu viteza unghiulară ω în jurul axei verticale trecînd printr-un capăt al său, luncă fără frecare un punct material de masă m (fig. 10.12). La momentul inițial: $x = x_0$ și $v = 0$. Să se afle legea mișcării relative și reacțiunea orizontală a tubului.

R. $x = x_0 \cos \omega t$, $N_A = 2m\omega^2 x_0 \sin \omega t$.

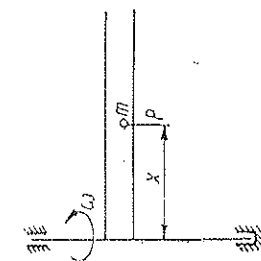


Fig. 10.12

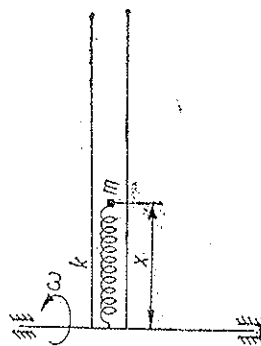


Fig. 10.13

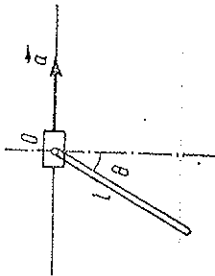
2. Un punct material de masă m , fixat de capătul unui resort orizontal de constantă k , se află în echilibru într-un tub, la distanța x_0 de axa verticală (fig. 10.13). Să se afle legea mișcării relative a punctului, dacă tubul începe să se rotească în jurul axei verticale cu viteza unghiulară constantă ω .

R. $x = x_0 + 2 \frac{\omega^2 x_0}{\omega_0^2 - \omega^2} (1 - \cos \sqrt{\omega_0^2 - \omega^2} \cdot t)$, dacă $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} > \omega$;

$$z = x_0 + \frac{\omega^2 x_0}{\omega^2 - \omega_0^2} (\text{ch} \sqrt{\omega^2 - \omega_0^2} \cdot t - 1), \text{ dacă } \omega_0 < \omega;$$

$$z = x_0 + \frac{1}{2} \omega^2 x_0^2, \text{ dacă } \omega_0 = \omega.$$

3. Punctul de suspensie O al unui pendul, construit dintr-o tijă omogenă de lungime l , se deplasează orizontal cu accelerația constantă a (fig. 10.14). Să se afle unghiul de deviere a pendulului în poziția de echilibru relativ și perioada micilor oscilații în jurul acestei poziții. Dar dacă punctul de suspensie O oscilează pe orizontală după legea $x = A \sin pt$, care va fi ecuația micilor oscilații, știind că la momentul inițial pendulul era în repaus?



$$\text{R. a) } \text{tg } \theta_0 = \frac{a}{g}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{2l}{3\sqrt{a^2 + g^2}}};$$

Fig. 10.14

$$\text{b) } \theta = \frac{Ap^2}{l(\omega^2 - p^2)} \left(\sin pt - \frac{p}{\omega} \sin \omega t \right), \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

4. Pe suprafața interioară netedă a unei pîinii conice cu deschiderea 2α poate aluneca fără frecare un punct material P . Pînia se rotește uniform cu viteza unghiulară ω în jurul axei sale verticale (fig. 10.15). În momentul inițial $t = 0$ punctul se găsea la distanța r_0 de vârful

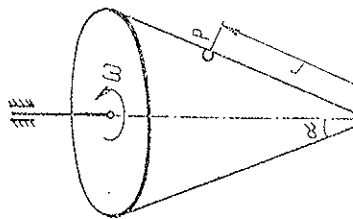


Fig. 10.15

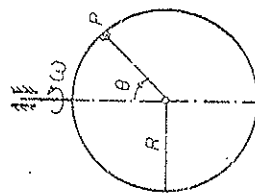


Fig. 10.16

pîinii și avea viteză relativă nulă. Să se afle legea de mișcare a particulei. Pentru ce viteză ω punctul urcă?

$$\text{R. } r = \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} + \left(r_0 - \frac{g \cos \alpha}{\omega^2 \sin^2 \alpha} \right) \text{ch}(\omega t \sin \alpha); \text{ pentru } \omega > \frac{\sqrt{r_0 g \cos \alpha}}{r_0 \sin \alpha} \text{ punctul urcă.}$$

5. Pe suprafața interioară netedă a unei sfere de rază R , care se rotește în jurul diametrului său vertical cu viteza unghiulară constantă ω , se rușcă fără frecare un punct material P (fig. 10.16). a) Să se afle viteza relativă a punctului în funcție de unghiul la centrul θ ,

știind că la momentul inițial unghiul era θ_0 și viteza relativă zero. b) Care vor fi pozițiile de echilibru relativ stabil și perioadele micilor oscilații în jurul acestor poziții?

$$\text{R. a) } v_{rel} = R \left[\omega^2 (\sin^2 \theta - \sin^2 \theta_0) + \frac{2g}{R} (\cos \theta_0 - \cos \theta) \right]^{1/2},$$

$$\text{b) } \theta = \arccos \frac{-g}{\omega^2 R}, \quad T = \frac{2\pi R \omega}{\sqrt{R^2 \omega^4 - g^2}} \text{ dacă } \omega > \sqrt{\frac{g}{R}},$$

$$\theta = \pi, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g - \omega^2 R}} \text{ dacă } \omega \leq \sqrt{\frac{g}{R}}.$$

virtutea echivalenței lor), *deci o constantă universală a fizicii*. Această viteză absolută coincide cu viteza luminii în vid.

Pe aceste două postulate se bazează teoria restrinsă a relativității (TR). Din al doilea postulat rezultă imediat *inexistența corpurilor absolut rigide*, deoarece cu o bară absolut rigidă, prin simplă împingere a ei, s-ar transmite instantaneu energie altui corp. De asemenea, al doilea postulat contrazice, după cum am spus, legea clasică de adunare a vitezelor, deci și transformările lui Galilei. Din cele două postulate se pot deduce acum noile transformări corecte, care coincid cu transformările lui Lorentz, deduse de acesta drept transformări care lasă invariante ecuațiile lui Maxwell, deduse de acesta drept mului. Prin urmare, ecuațiile lui Maxwell sînt corecte. În schimb, legile mecanicii lui Newton, invariante la transformările lui Galilei, nu sînt exacte, la fel ca și aceste transformări.

11.2. TRANSFORMĂRILE LUI LORENTZ

Noile transformări trebuie să fie *liniare*, la fel ca și transformările lui Galilei. În adevăr, ecuațiile de grad mai înalt au mai multe soluții și atunci observațiile dintr-un SR s-ar interpreta neînțeles în alte SR, or trebuie să existe o corespondență biunivocă între coordonatele aceluiași eveniment, înregistrate în diferite SR. De asemenea, noile transformări trebuie să coincidă practic cu transformările lui Galilei pentru fenomenele mecanice obișnuite, unde se aplică cu mare precizie mecanica clasică.

Fie sistemele de coordonate alese ca în fig. 11.1. Atunci coordonatele y și z nu sînt afectate de mișcarea reciprocă a sistemelor, fiind transverse pe direcția de mișcare, deci $y' = y$, $z' = z$.

În adevăr, fie $y' = ax + by + cz + dt$. Pentru un eveniment oarecare din planul Oxz avem $y = 0$ și $y' = 0$, deci $0 = ax + cz + dt$ pentru *oricare* x, z, t , ceea ce implică $a = c = d = 0$, deci $y' = by$. Sistemele fiind *echivalente*, trebuie să avem și reciproc: $y = by'$, adică $b^2 = 1$, $b = \pm 1$, și pentru aceeași orientare a axelor, $b = 1$. Judecînd analog pentru z' , găsim $y' = y$, $z' = z$. Pentru coordonatele x', x trebuie să avem:

$$x' = \alpha(x - ut), \quad (11.1)$$

unde α nu depinde de coordonate, ci eventual de viteza u de transport dintre cele două SR. În

adevăr, relația trebuie să fie liniară și pentru punctele $x = ut$ din planul $O'y'z'$ trebuie să rezultă $x' = 0$ în S' , deci polinomul liniar al lui x' trebuie să fie divizibil cu $x - ut$, adică să fie proporțional cu $x - ut$.

Analog, trebuie să avem:

$$x = \alpha(x' + ut'). \quad (11.2)$$

deoarece pentru punctele $x' = -ut'$ din planul Oyz trebuie să rezultă $x = 0$ în S , deci polinomul lui x trebuie să fie proporțional cu $x' + ut'$.

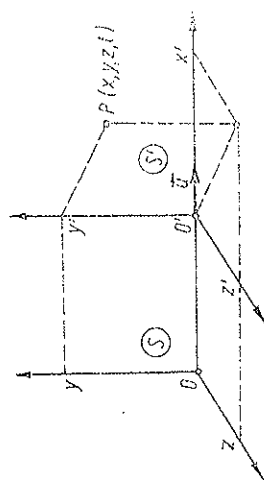


Fig. 11.1.

MECANICA RELATIVISTĂ

Teoria restrinsă a relativității (sau teoria relativității restrinse) a fost creată în esență de Albert Einstein în 1905.

11.1. POSTULATELE TEORIEI RELATIVITĂȚII

În 1863 J. C. Maxwell a formulat legile electromagnetismului și a dat teoria electromagnetică a luminii. Ecuațiile lui Maxwell nu sînt însă G-invariante, adică nu sînt invariante la transformările lui Galilei, deci legile fenomenelor electromagnetice și optice ar trebui să difere de la un SR în față la altul. Or, aceasta ar permite determinarea mișcării relative a SR în față și evidențierea unui SR absolut, presupus legat de eterul cosmic, universal. Ceea ce n-a permis mecanica, ar permite optica. Dar, nenumăratele experiențe optice, de exemplu experiențele lui Michelson și Morley de la sfîrșitul secolului trecut, au arătat că nici prin mijloace optice nu se poate determina mișcarea unui SR în față. Astfel, s-a găsit că viteza luminii în vid este independentă de mișcarea inercială a sursei sau a observatorului, deci aceeași în față de diferite SR. Aceasta contrazice legea clasică de adunare a vitezelor, deci și transformările lui Galilei.

Contradicția ivită a fost rezolvată clar și precis în 1905 de către Albert Einstein (1879—1955) prin crearea teoriei relativității (TR). Pe baza rezultatelor experimentale, Einstein extinde principiul relativității al lui Galilei la întreaga fizică:

(I) *Toate legile fizicii, nu numai cele mecanice, sînt aceleași în toate SR inerțiale.*

Nici o experiență fizică, efectuată în interiorul unui sistem inercial, nu ne permite să determinăm mișcarea rectilinie uniformă a acestuia față de alte SR inerțiale. Toate SR inerțiale sînt absolut echivalente din punct de vedere fizic; nu există deci un spațiu absolut, care să poată fi luat drept SR absolut. Principiul relativității al lui Einstein constituie *primul* postulat al teoriei relativității.

(II) Cel de-al doilea postulat afirmă că *viteza maximă de propagare a interacțiunilor sau a energiei este finită, și aceeași în toate SR inerțiale* (în

Coefficientul α trebuie să fie același în virtutea echivalenței SR, altfel trecerea de la un SR la altul ar fi diferită și unul din ele s-ar evidenția, contrar postulatului I. Putem considera că S se mișcă cu viteza $-u$ față de S', atunci coordonatele din S vor fi considerate cu accent, iar cele din S' fără accent, deci trecerea inversă se obține din aceea directă prin substituția $(x, t, u) \leftrightarrow (x', t', -u)$:

$$x' = \alpha(x - ut) \leftrightarrow x = \alpha(x' + ut').$$

În cazul transformărilor Galilei $\alpha = 1$.

Să folosim acum postulatul II pentru a afla pe α . Să presupunem că în momentul inițial când originile O, O' coincid, se emite un semnal luminos din origine în sensul axei comune Ox. Un punct oarecare în care ajunge semnalul are coordonata $x = ct$ în S și $x' = ct'$ în S', cu aceeași viteză c a luminii. Aplicând transformările (11.1-2) pentru acest punct în care ajunge semnalul luminos, obținem:

$$ct' = \alpha(c - u)t, \quad ct = \alpha(c + u)t',$$

de unde, înmulțindu-le membru cu membru:

$$c^2 = \alpha^2(c^2 - u^2), \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{u}{c}, \quad (11.3)$$

deci

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (11.4)$$

Introducând prima relație în a doua, sau invers, obținem formulele pentru transformarea timpului:

$$t' = \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad t = \frac{t' + ux'/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \quad (11.5)$$

Reunind rezultatele, avem următoarele transformări Lorentz, care dau trecerea de la un SR inerțial la altul care se mișcă față de primul cu viteza constantă u de-a lungul axei comune Ox:

$$\left\{ \begin{aligned} x' &= \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, & x &= \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \\ y' &= y, \quad z' = z, & y &= y', \quad z = z', \\ t' &= \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, & t &= \frac{t' + ux'/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \end{aligned} \right. \quad (11.6)$$

Transformările lui Galilei se obțin de aici ca un caz limită când $c \rightarrow \infty$, sau, aproximativ, când $u \ll c$ ($\beta = u/c \ll 1$), neglijând puterile superioare ale lui $\beta = u/c$.

Conform postulatului I, toate ecuațiile fizicii trebuie să fie invariante la transformările lui Lorentz, pe scurt, Lorentz-invariante sau L-invariante.

Mecanica clasică este invariantă la transformările Galilei și nu la transformările Lorentz, de aceea nu este exactă pentru mișcări cu viteze comparabile cu viteza luminii și trebuie înlocuită cu mecanica relativistă.

11.3. CONTRACȚIA LUNGIMILOR

Un același corp are dimensiuni în general diferite dacă sînt măsurate în SR diferite. În adevăr, fie o riglă în repaus în S de-a lungul axei Ox, avînd lungimea $l_0 = x_2 - x_1$ (diferența absciselor capetelor riglei). Lungimea riglei măsurată în S' va fi dată tot de diferența absciselor capetelor riglei, luate în același moment t' în S':

$$\begin{aligned} l &= (x_2' - x_1')|_{t'} = (x_2 \sqrt{1 - u^2/c^2} - ut') - (x_1 \sqrt{1 - u^2/c^2} - ut') = \\ &= (x_2 - x_1) \sqrt{1 - u^2/c^2} = l_0 \sqrt{1 - u^2/c^2} < l_0, \end{aligned} \quad (11.7)$$

deci lungimea riglei măsurată în SR față de care ea se mișcă (longitudinal) este mai mică, decît măsurată în SR față de care ea este în repaus.

Reciproc, fie acum o riglă în repaus în S' de-a lungul axei O'x', avînd lungimea $l_0 = x_2' - x_1'$ în S'. Lungimea riglei în S, față de care ea se mișcă cu viteza u , va fi dată de diferența absciselor capetelor ei, măsurate în același moment t în S:

$$\begin{aligned} l &= (x_2 - x_1)|_t = (x_2' \sqrt{1 - u^2/c^2} + ut) - (x_1' \sqrt{1 - u^2/c^2} + ut) = \\ &= (x_2' - x_1') \sqrt{1 - u^2/c^2} = l_0 \sqrt{1 - u^2/c^2}, \end{aligned}$$

adică același rezultat:

lungimea riglei măsurată în SR propriu (față de care rigla este în repaus) este maximă.

Numai dimensiunile longitudinale față de direcția mișcării sînt diferite în SR diferite, cele transversale pe direcția mișcării sînt aceleași ($y' = y, z' = z$), de aceea volumul corpului apare contractat în același raport, de exemplu, elementul de volum dV :

$$dV = dV_0 \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (11.8)$$

Un corp sferic în SC propriu apare turtit în direcția mișcării în SR față de care el se mișcă.

11.4. DILATAREA DURATELOR

Fie acum într-un punct de abscisă x în S un proces care durează $\tau_0 = t_2 - t_1$, de exemplu, două indicații succesive ale unui ceasornic aflat în acel punct sau timpul de viață al unei particule elementare. Durata acelu-

iași proces, măsurată în S' , este dată de diferența momentelor corespunzătoare în S' considerate pentru *aceleași* abscisă x :

$$\tau = (t'_2 - t'_1)|_x = \frac{t_2 - ux/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - \frac{t_1 - ux/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} > \tau_0. \quad (11.9)$$

deci durata unui proces într-un punct aflat în mișcare față de SR considerat este mai mare decât durata aceluiași proces măsurată în SR față de care acel punct este în repaus.

Reciproc, fie acum un proces într-un punct x' în S' care durează $\tau_0 = t'_2 - t'_1$ în S' . În S durata aceluiași proces va fi dată de diferența momentelor corespunzătoare în S considerate pentru același x' :

$$\tau = (t_2 - t_1)|_{x'} = \frac{t'_2 + ux'/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - \frac{t'_1 + ux'/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}} > \tau_0.$$

adică același rezultat:

durata indicată de un ceasornic este minimă în SC propriu (față de care ceasornicul este în repaus).

Din (11.8) și (11.9) rezultă că produsul $dV dt$ este invariant:

$$dV dt = dV_0 \sqrt{1-\beta^2} \cdot dt_0 / \sqrt{1-\beta^2} = dV_0 dt_0. \quad (11.10)$$

Din transformările Lorentz rezultă caracterul relativ al simultaneității: două evenimente simultane în S , (x_1, t) și (x_2, t) , de exemplu capetele unei rigle ca mai sus, nu mai sînt simultane în S' :

$$t'_1 = \frac{t - ux_1/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \neq t'_2 = \frac{t - ux_2/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \quad (x_1 \neq x_2). \quad (11.11)$$

Viteza limită sau viteza maximă c , egală cu viteza luminii în vid, nu poate fi depășită. Altfel, transformările Lorentz ar deveni imaginare și ar pierde sens fizic: coordonatele evenimentelor în noul reper S' ar deveni imaginare! Pe de altă parte, cînd $u \rightarrow c$, dimensiunile longitudinale ale corpurilor tind către zero (pentru $u > c$, devin imaginare!), spațiul tridimensional degenerază într-un spațiu bidimensional, devine un plan perpendicular pe direcția mișcării. Durata proceselor tind către infinit (pentru $u > c$, devin imaginare!), cu alte cuvinte orice proces încetează (secunda durează o eternitate), dinamica degenerază în statică.

11.5. COMPUNEREA VITEZELOR

Diferențînd transformările lui Lorentz și împărțînd primele trei ecuații obținute la ultima, avem:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{dx' + u dt'}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz', \quad dt = \frac{dt' + u dx'/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{dx' + u dt'}{dt' + u dx'/c^2} \quad \text{sau} \quad v_x = \frac{v'_x + u}{1 + v'_x u/c^2}, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dy' \sqrt{1-u^2/c^2}}{dt' + u dx'/c^2}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dz' \sqrt{1-u^2/c^2}}{dt' + u dx'/c^2} \quad \text{sau} \\ v_y &= \frac{v'_y \sqrt{1-u^2/c^2}}{1 + v'_x u/c^2}, \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1-u^2/c^2}}{1 + v'_x u/c^2}. \end{aligned} \quad (11.12)$$

și formulele inverse (se obțin mutînd accentele și schimbînd pe u în $-u$):

$$v'_x = \frac{v_x - u}{1 - v_x u/c^2}, \quad v'_y = \frac{v_y \sqrt{1-u^2/c^2}}{1 - v_x u/c^2}, \quad v'_z = \frac{v_z \sqrt{1-u^2/c^2}}{1 - v_x u/c^2}. \quad (11.13)$$

Reamintim că S' se mișcă cu viteza u față de S de-a lungul axei comune Ox ca în fig. 11.1 (\vec{v} — viteza relativă, \vec{u} — viteza de transport, \vec{v} — viteza absolută). Față de legea clasică newtoniană de compunere a vitezelor, în legea relativistă apare numitorul $1 + v'_x u/c^2$, iar la componentele transversale apare la numărător radicalul Lorentz.

În cazul limită $c \rightarrow \infty$ sau pentru $u \ll c$, neglijînd β^2 , obținem formulele clasice newtoniene de compunere a vitezelor.

Formulele relativiste de compunere a vitezelor ne arată de asemenea că viteza c nu poate fi depășită. De exemplu, dacă compunem două viteze de aceeași direcție și sens (Ox), egale cu $3c/4$, obținem

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1 + v'_x u/c^2} = \frac{3c/4 + 3c/4}{1 + 9/16} = \frac{24}{25} c < c.$$

Dacă una din viteze este egală cu c , rezultatul este tot c , adică viteza luminii este aceeași în toate SR (inerțiale):

$$v_x = \frac{c + u}{1 + cu/c^2} = c, \quad v_x = \frac{c + c}{1 + c \cdot c/c^2} = c.$$

Conform formulelor clasice newtoniene ar fi trebuit să obținem, respectiv:

$$\begin{aligned} v_x &= v'_x + u = 3c/4 + 3c/4 = 3c/2 > c, \\ v_x &= c + u > c, \quad v_x = c + c = 2c, \end{aligned}$$

în contradicție cu experiența (de exemplu, experiențele lui Michelson și Morley).

11.6. SPAȚIUL MINKOWSKI

Introducem un spațiu cu 4 dimensiuni E_4 : trei dimensiuni spațiale (x, y, z) și una temporală (ct) . Un eveniment se reprezintă printr-un punct în acest spațiu, având coordonatele:

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad x^4 = ct, \quad (11.14)$$

unde pentru omogenizarea dimensiunilor, timpul t se înmulțește cu constanta universală c . Transformările Lorentz reprezintă o transformare a coordonatelor evenimentelor sau punctelor din acest spațiu E_4 .

11.6.1. CUADRIINTERVALE

Fie un semnal luminos care pleacă din punctul (x_1, y_1, z_1) la momentul t_1 și sosește în punctul (x_2, y_2, z_2) la momentul t_2 , atunci distanța parcursă de semnal este egală cu viteza luminii ori timp:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = c^2(t_2 - t_1)^2. \quad (11.15)$$

Trecând la S' , adică aplicând transformările Lorentz, găsim:

$$(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 = c^2(t'_2 - t'_1)^2, \quad (11.16)$$

ceea ce se poate scrie și direct în baza postulatului II al constanței vitezei luminii. Prin urmare, expresia pătratică:

$$s^2 \stackrel{\text{def}}{=} (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 \quad (11.17)$$

este Lorentz-invariantă și nulă pentru propagarea luminii, s se numește *cuadriinterval*. Pentru două evenimente oarecare quadriintervalul s (11.17) nu este nul, dar rămâne *L-invariant*:

$$s = s' = \text{inv}, \quad (11.18)$$

ceea ce se poate verifica imediat. Cuadriintervalul dintre două evenimente joacă rolul *distanței* dintre punctele reprezentative corespunzătoare în spațiul quadridimensional al evenimentelor E_4 , adică definește *metrica* acestui spațiu. Cuadridistanța (11.17) diferă de distanța obișnuită dintr-un spațiu 4-dimensional euclidian doar prin semnul minus al ultimului pătrat (timpul rămâne calitativ diferit de spațiu!), de aceea spațiul introdus se numește spațiu *pseudoeuclidian* (metrică pseudoeuclidiană); geometria sa diferă de geometria euclidiană. De exemplu, pentru distanța dintre două puncte aflate în planul Oxt ($y_1 = y_2 = 0, z_1 = z_2 = 0$) (fig. 11.2) avem:

$$s^2 = (x_2 - x_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2,$$

adică pătratul ipotenuzei este egal cu *diferența* pătratelor catetelor și nu cu suma lor ca în planul euclidian.

Există puncte (evenimente) distincte între care 4-distanța este nulă, anume punctele (evenimentele) legate prin propagarea luminii (11.16):

Analog rotațiilor dintr-un spațiu euclidian, care lasă invariantă distanța, tot astfel transformările Lorentz reprezintă o *pseudorotație în spațiul-timp relativist pseudoeuclidian* E_4 , care lasă invariant quadriintervalul: $s = s'$.

Transformările Lorentz particulare (11.6) reprezintă o pseudorotație în planul spațio-temporal (x, t) .

În mecanica clasică avem doi invariant la transformările Galilei: distanța spațială și distanța temporală dintre două evenimente. În locul lor, în TR avem un singur invariant la transformările Lorentz: quadriintervalul s (11.17), dar mai avem o viteză absolută c .

Existența acestei constante universale a fizicii permite unificarea invariantă a spațiului și timpului, și invarianta quadriintervalului dovedește interconexiunea dintre spațiu și timp. În această unificare timpul și spațiul se disting calitativ prin semnatura metricii, adică prin semnele $+$ și $-$ în expresia intervalului. Un alt *L-invariant* din acest spațiu este elementul de cuadriinterval (hipervolum) dV dx , conform lui (11.10).

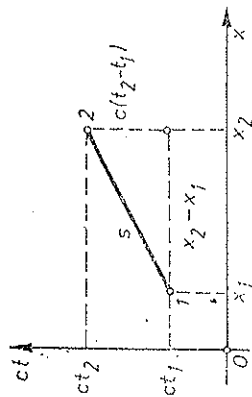


Fig. 11.2

11.6.2. CLASIFICAREA CUADRIINTERVALELOR

Un interval s real, adică

$$s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 > 0, \quad (11.19)$$

se numește interval de tip *spațial*. Două evenimente separate printr-un interval de tip *spațial* sînt absolut separate spațial sau absolut independente și nu pot fi legate cauzal între ele, deoarece nici un semnal nu le poate uni, viteza necesară fiind supraluminoasă, conform lui (11.19):

$$\frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}{(t_2 - t_1)^2} > c^2.$$

Nu există un SR în care cele două evenimente să apară în același loc, deoarece ar trebui ca în noul SR să avem:

$$s'^2 = -c^2(t'_2 - t'_1)^2 = s^2 > 0,$$

ceea ce este imposibil, dar există în schimb un SR în care cele două evenimente să fie *simultane*, atunci:

$$s'^2 = (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 = s^2 > 0.$$

Un interval s imaginar, adică

$$s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 < 0 \quad (11.20)$$

se numește interval de tip *temporal*.

Două evenimente separate printr-un interval de tip temporal sunt absolut separate temporal sau în succesiune temporală absolută și pot fi legate cauzal între ele.

Nu există un SR în care cele două evenimente să fie simultane deoarece ar trebui ca în noul SR să avem:

$$s'^2 = (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 = s^2 < 0,$$

ceea ce este imposibil, dar există în schimb un SR în care cele două evenimente să se producă în același loc; atunci:

$$s'^2 = -c^2(t'_2 - t'_1)^2 = s^2 < 0.$$

De exemplu, cuadrintervalul pentru două poziții succesive ale unei particule, care se mișcă cu viteza v este ($dt = v dx$)

$$ds^2 = dt^2 - c^2 dx^2 = (v^2 - c^2) dt^2 < 0, \quad (11.21)$$

deci este totdeauna de tip temporal.

În reperul propriu al particulei $ds^2 = -c^2 d\tau^2$ și din (11.21) rezultă

$$d\tau = \frac{dt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

în concordanță cu dilatarea duratelor (11.9).

În sfârșit, intervalul s este nul pentru două evenimente legate prin propagarea luminii.

11.6.3. HIPERCONUL LUMINOS

Evenimentele separate de evenimentul-origine prin interval nul verifică condiția

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0, \quad (11.22)$$

adică în spațiul obișnuit sînt punctele de pe sfera de rază $r = ct$, cu centrul în origine, adică unda sferică luminoasă care se propagă. În spațiul Minkowski, (11.22) reprezintă un hipercon, numit *con luminos* (sau *izotrop*). Luînd pentru simplificare doar două axe spațiale x, y , obținem conul din fig. 11.3, a; luînd o singură axă spațială x , obținem două drepte secante (bisectoarele cadranelor) din fig. 11.3, b.

Hiperconul luminos dus prin origine împarte cuadr spațiul evenimentelor în două regiuni:

1) *viitorul absolut* și *trecurul absolut* formate din evenimentele din interiorul conului, separate de evenimentul-origine printr-un interval de tip temporal $s^2 < 0$, cu $t > 0$, respectiv $t < 0$; aceste evenimente pot fi legate cauzal de evenimentul origine și succesiunea lor temporală față de evenimentul-origine (posterior-anterior) este absolută, adică nu poate fi inversată (acestea sînt în toate SR);

2) evenimentele *absolut depărtate*, situate în exteriorul conului și separate de evenimentul-origine printr-un interval de tip spațial $s^2 > 0$; aceste evenimente nu pot fi legate cauzal de evenimentul-origine și succesiunea lor temporală față de evenimentul-origine este relativă, adică poate fi inversată față de diferite SR.

Mișcarea unei particule se reprezintă în cuadr spațiul printr-o linie numită *linie de univers*, situată mereu în interiorul pînzelor superioare ale

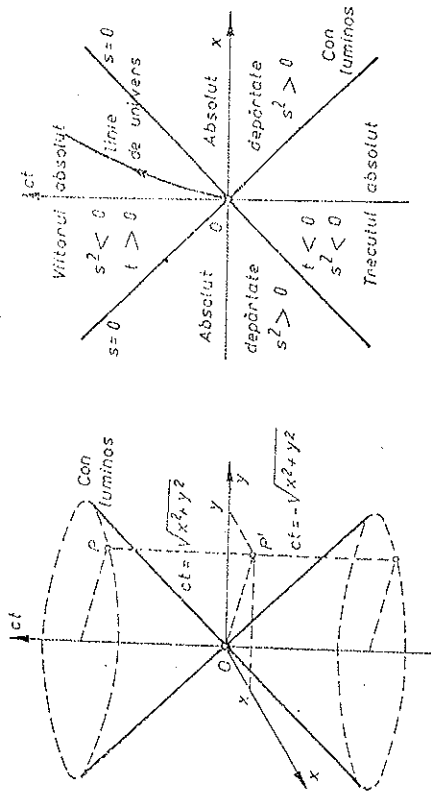


Fig. 11.3

conurilor luminoase duse în punctele succesive ale liniei, deci înclinată sub un unghi mai mic de 45° față de axa ct , deoarece $v < c$ ($v/c < 1$), adică ds este de tip temporal: $ds^2 < 0$ (11.21). Pentru o particulă în repaus linia de univers este paralelă cu axa ct .

11.7. IMPULSUL ȘI MASA

După cum am văzut, ecuațiile mecanicii clasice newtoniene sînt G-invariante, de exemplu, legea conservării impulsului unui sistem izolat este valabilă în mecanica clasică în orice SR înecă dacă aplicăm transformările lui Galilei. Deoarece în TR viteza se transformă altfel decît în mecanica clasică newtoniană, dacă am considera masa independentă de SR, legea conservării impulsului *definit* prin $m\vec{v}$ n-ar fi L-invariantă, adică n-ar fi valabilă în orice SR inerțial.

Prim urmare, dacă păstrăm definiția impulsului (cantității de mișcare) ca *produsul dintre masă și viteză*, $m\vec{v}$, și cerem valabilitatea legii conservării impulsului pentru sisteme izolate în orice SR inerțial conform *transformărilor Lorentz*, trebuie să admitem că masa depinde de SR față de care o măsurăm, analog lungimilor și duratelor. Masa corpului măsurată în SR propriu, adică în SC legat rigid de corp, față de care corpul este în repaus, se numește *masa de repaus* m_0 , atunci față de alte SR masa va fi diferită, dependentă de viteza corpului față de acele SR. Masa de mișcare trebuie să depindă de modulul vitezei, altfel SR n-ar fi echivalente și s-ar evidenția o direcție privilegiată.

Putem găsi legea variației masei cu viteza considerând un exemplu de ciocnire perfect elastică a două bile identice. Dacă două bile identice se mișcă înainte de ciocnire cu viteze egale în modul și de sens opus, impulsurile lor vor fi egale în modul și de sens opus, deci impulsul total va fi nul. Atunci și după ciocnire impulsul total trebuie să fie nul, adică și după ciocnire impulsul-

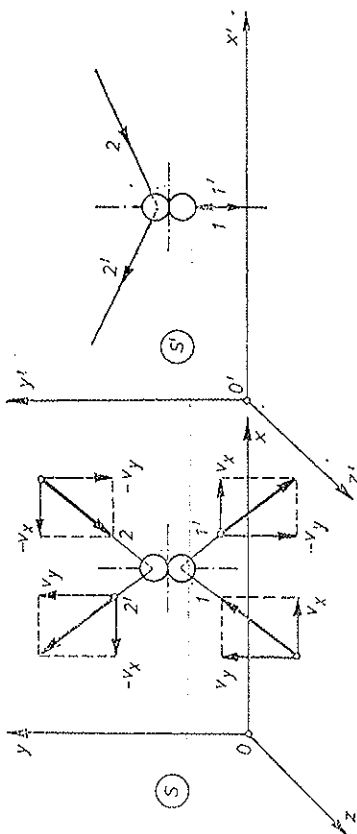


Fig. 11.4

rile bilor trebuie să fie egale în modul și de sens opus. Din condiția ciocnirii perfect elastice rezultă că impulsul fiecărui corp în parte nu se schimbă în valoare absolută prin ciocnire, adică masa și viteza în modul a fiecărui corp în parte (bilele fiind identice) nu se schimbă prin ciocnire (fig. 11.4). În acest caz energia cinetică (dependentă de masă și viteză) a fiecărui corp în parte nu se schimbă prin ciocnire, adică este respectată condiția de conservare a energiei cinetice în ciocniri perfect elastice.

Alegând sistemele de referință ca în fig. 11.4 (v_x nu se schimbă, v_y schimbă semnul prin ciocnire), cerem respectarea legii de conservare a impulsului și în S' care se mișcă cu viteza $v = v_x$. Atunci vitezele bilor în S' , înainte și după ciocnire se calculează ușor cu ajutorul formulelor de compunere a vitezelor (11.13);

	Înainte de ciocnire	După ciocnire
Bila 1	$0, \frac{v_y}{\sqrt{1-v_x^2/c^2}}$	$0, -\frac{v_y}{\sqrt{1-v_x^2/c^2}}$
Bila 2	$-\frac{2v_x}{1+v_x^2/c^2}, \frac{-v_y\sqrt{1-v_x^2/c^2}}{1+v_x^2/c^2}$	$\frac{-2v_x}{1+v_x^2/c^2}, \frac{v_y\sqrt{1-v_x^2/c^2}}{1+v_x^2/c^2}$

Conservarea impulsului pe direcția Ox este automat verificată pentru fiecare bilă în parte. Pe direcția Oy trebuie să avem:

$$\frac{m_1 v_y}{\sqrt{1-v_x^2/c^2}} - \frac{m_2 v_y \sqrt{1-v_x^2/c^2}}{1+v_x^2/c^2} = -\frac{m_1 v_y}{\sqrt{1-v_x^2/c^2}} + \frac{m_2 v_y \sqrt{1-v_x^2/c^2}}{1+v_x^2/c^2}$$

sau

$$m_2 = m_1 \frac{1 + v_x^2/c^2}{1 - v_x^2/c^2}, \quad (11.23)$$

de unde se vede că masele de mișcare ale celor două bile nu sînt egale, deoarece au viteze diferite. Relația (11.23) fiind valabilă pentru orice v_x, v_y , la limită cînd $v_y \rightarrow 0$, m_1 va deveni masa de repaus m_0 (în S'), iar m_2 va corespunde vitezei de mișcare $v = 2v_x/(1 + v_x^2/c^2)$, astfel încît obținem din (11.23) formula variației masei cu viteza:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (11.24)$$

și impulsul (cantitatea de mișcare):

$$\vec{p} = m\vec{v} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (11.25)$$

Cînd $v \rightarrow c$, masa și impulsul tind către infinit (pentru $v > c$, ele devin imaginare!). Masa este minimă în SC propriu.

11.3. FORȚA

Prin urmare, impulsul unui sistem izolat se conservă. Atunci variația impulsului se datorește forței aplicate:

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{d}{dt} \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = m \vec{a} + \frac{m(\vec{v} \cdot \vec{a})}{c^2 - v^2} \vec{v} = \\ &= m \vec{a} + \frac{mv^2/c^2}{1 - v^2/c^2} \vec{a}_t, \quad (11.26) \end{aligned}$$

deci în general forța nu este coliniară cu accelerația. Pentru $c \rightarrow \infty$, ultimul termen tinde către zero și regăsim ecuația clasică. Descompunînd accelerația în cele două componente, avem:

$$\vec{F} = m \vec{a}_n + \frac{m}{1-v^2/c^2} \vec{a}_t = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \vec{a}_n + \frac{m_0}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} \vec{a}_t = \vec{F}_n + \vec{F}_t. \quad (11.27)$$

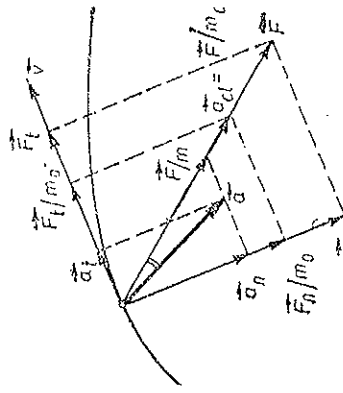


Fig. 11.5

Dacă particula are viteze relativiste (apropiate de viteza luminii) atunci forța \vec{F} aplicată particulei produce o accelerație mai mică decît în cazul clasic și deviază spre normala la traiectorie, deci accelerația nu mai este riguros coliniară cu forța (este din ce în ce mai greu de modificat modulul vitezei în comparație cu direcția vitezei) (fig. 11.5).

11.9. ENERGIA

Lucrul mecanic al forței aplicate punctului material trebuie să fie egal cu variația energiei cinetice a punctului material, deci

$$dW = \vec{F} d\vec{r} = \vec{F} \vec{v} dt = \frac{d(m\vec{v})}{dt} \vec{v} dt = d(m\vec{v})\vec{v} =$$

$$= v^2 dm + m\vec{v} d\vec{v} = v^2 dm + mv dv,$$

dar din (11.24) avem

$$dm = \frac{mv dv}{c^2 - v^2} = \frac{m\vec{v} d\vec{v}}{c^2 - v^2}, \quad (11.28)$$

astfel încît,

$$dW = v^2 dm + (c^2 - v^2) dm = c^2 dm = dE_c, \quad (11.29)$$

$$E_c = mc^2 - m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - m_0 c^2, \quad (11.30)$$

unde $E_0 = m_0 c^2$ este energia de repaus, iar $E = m c^2$ este energia totală. În cazul vitezelor mici, $v/c \ll 1$, (11.30) devine:

$$E_c = m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots \right) - m_0 c^2 \approx \frac{1}{2} m_0 v^2, \quad (11.31)$$

adică se obține în prima aproximație expresia clasică a energiei cinetice.

O serie întreagă de considerații teoretice și de experiențe (de exemplu, emisia și absorbția radiației electromagnetice, reacțiile nucleare) arată că *proporționalitatea dintre masă și energie este universal valabilă* (pentru orice fel de energii):

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (11.32)$$

(cînd $v \rightarrow c$, $E \rightarrow \infty$, iar pentru $v > c$, E devine imaginar). Prin urmare, orice variație de energie este însoțită de o variație corespunzătoare a masei, și reciproc.

Legea conservării energiei este și lege a conservării masei.

De exemplu, dacă un corp absoarbe o cantitate de căldură $Q = 1$ cal, masa lui crește cu

$$m = \frac{Q}{c^2} = \frac{4,18 \text{ J}}{9 \cdot 10^{16} \text{ m}^2/\text{s}^2} = 4,65 \cdot 10^{-17} \text{ kg}.$$

O energie de 500 miliarde kWh corespunde unei mase de 20 kg.

În spațiul-timp relativist impulsul $\vec{p} = m\vec{v}$ și energia $E = mc^2$ se unifică într-un cuadri-vector: trei componente spațiale \vec{p} și componenta a patra:

$E/c = mc$. Pătratul acestui cuadri-vector se calculează ca și pătratul cuadri-tervalului, conform metricii spațiului-timp:

$$p^2 - E^2/c^2 = p^2 - m^2 c^2 = -m_0^2 c^2 = \text{inv}, \quad (11.33)$$

$$E = c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}, \quad (11.34)$$

în locul formulei clasice $E = p^2/2m$. Pentru particule cu masa de repaus nulă (foton, neutrino):

$$E = pc, \quad (m_0 = 0). \quad (11.35)$$

Tot astfel se unifică toate mărimile fizice în cuadri-vectori sau, în general, în tensori (de exemplu, câmpul electromagnetic).

Teoria relativității a fost strălucit verificată experimental. Astfel, expresia relativistă a impulsului și variația masei cu viteza se verifică la particulele elementare accelerate la viteze mari. Masa unui electron accelerat pînă la o energie de 30 MeV crește de 60 ori ($m_e c^2 = 0,511$ MeV), iar masa unui proton accelerat pînă la 50 GeV crește de peste 50 de ori ($m_p c^2 = 938,2$ MeV).

Dilatarea duratelor se verifică în calculul timpilor de viață ale mezonilor în SC de laborator față de SC propriu. Relația dintre masă și energie se verifică în toate reacțiile nucleare și în toate transformările reciproce ale particulelor elementare. Astfel, un foton se poate transforma într-o pereche electron-positron numai dacă energia sa $h\nu$ este cel puțin egală cu masa de repaus a celor două particule $2m_0 c^2$:

$$h\nu > 2m_0 c^2 = 2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 9 \cdot 10^{16} \text{ m}^2/\text{s}^2 = 1,64 \cdot 10^{-13} \text{ J} = 1,022 \text{ MeV}.$$

$$\lambda = cT = \frac{c}{\nu} < \frac{h}{2m_0 c} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} =$$

$$= 1,21 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 1,21 \cdot 10^{-2} \text{ Å}.$$

Astăzi este în plină creație o teorie *cuantică relativistă* a cîmpurilor și particulelor elementare.

PROBLEME

1. La momentul $t = 0$ se emite din originea comună a sistemelor S, S' un semnal luminos în toate direcțiile. După un timp t , observatorul din S constată că frontul de undă reprezintă o sferă cu centrul în originea O a sistemului său de referință S , de ecuație $x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$. Ce constată celălalt observator?

R. Constată același lucru: frontul de undă reprezintă o sferă cu centrul în originea O' a sistemului său de referință S' , de ecuație: $x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$ (invarianța cuadri-tervalului).

2. Să se arate că transformările Lorentz se pot scrie sub forma:

$$x = x' \cosh \psi + ct' \sinh \psi, \quad ct = x' \sinh \psi + ct' \cosh \psi,$$

unde $\tanh \psi = v/c$.

3. Mezonii π^\pm generați în laborator au un timp de viață $\tau_0 = 2,6 \cdot 10^{-8}$ s. Se constată experimental că mezonii π^\pm născuți la înălțimi mari, $h = 10 - 20$ km, ajung totuși la suprafața Pământului, deși s-ar părea că nu pot parcurge o distanță mai mare decât $s_{max} = \tau_0 c = 7,8$ m. Să se explice acest fapt.

R. Dăltarea duratei pentru observatorul terestru din SL sau contracția lungimilor pentru SR propriu al mezonilor.

4. Cu cât crește masa de repaus $m_0 = 1,00$ t a unui satelit care iese din cîmpul gravitațional terestru?

R. $\Delta m = m_0 g R / c^2 \cong 0,7$ mg. (R — raza Pământului).

5. O particulă în repaus de masă m_2 este lovită de o altă particulă cu masa de repaus m_1 și viteza v_1 , pe care o absoarbe. Să se afle masa de repaus m' și viteza v' a particulei compuse rezultante.

$$R. \quad m' = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 \sqrt{1 - v_1^2/c^2}}, \quad v' = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2 \sqrt{1 - v_1^2/c^2}}.$$

6. O particulă în repaus de masă m fisionează în două particule de mase de repaus m_1, m_2 . Să se afle energiile totale E_1, E_2 ale celor două particule rezultante.

$$R. \quad E_1 = \frac{m^2 + m_1^2 - m_2^2}{2m} c^2, \quad E_2 = \frac{m^2 - m_1^2 + m_2^2}{2m} c^2.$$

7. În sistemul S' o particulă se mișcă în planul $O'x'y'$ cu viteza \vec{v}' sub unghiul θ' față de axa $O'x'$. Care va fi unghiul respectiv θ al vitezei \vec{v} în S ?

$$R. \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{v' \sqrt{1 - u^2/c^2} \cdot \sin \theta'}{v' \cos \theta' + u}. \quad \text{În particular, pentru propagarea luminii (aberația luminii): } \operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{u/c + \cos \theta'} \sin \theta', \quad \text{de unde pentru unghiul de aberație } \Delta \theta = \theta' - \theta \cong \frac{u}{c} \sin \theta'.$$

8. Să se scrie formulele de transformare pentru cuadrivectorul impuls $p^i = (\vec{p}, E/c)$, ($i = 1, 2, 3, 4$).

$$R. \quad p_x = \frac{p'_x + u E'/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad p_y = p'_y, \quad p_z = p'_z, \quad E = \frac{E' + u p'_x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

9. Cuadrivectorul viteză este $u^i = c \frac{dx^i}{ds} = \left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)$, ($i = 1, 2, 3, 4$). Să se arate că cuadrivectorul impuls $p^i = m_0 u^i$. Să se calculeze pătratul (în E_4) cuadrivectorului viteză.

R. $-c^2$.

10. Cuadrivectorul accelerație este $a^i = c \frac{du^i}{ds} = c^2 \frac{d^2 x^i}{ds^2}$, ($i = 1, 2, 3, 4$). Să se arate că el este „perpendicular” (în E_4) pe cuadrivectorul viteză u^i .

11. Cuadrivectorul forță este $f^i = c \frac{dp^i}{ds} = m_0 c \frac{du^i}{ds} = m_0 a^i$, ($i = 1, 2, 3, 4$). Să se arate

$$\text{că } f^i = \left(\frac{\vec{F}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c \sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \text{ și că el este „perpendicular” (în } E_4 \text{) pe cuadrivectorul viteză.}$$

12. Un mezon μ se mișcă în SL cu viteza v și a parcurs o distanță s de la generarea sa pînă la dezintegrarea sa. Să se calculeze durata de viață proprie și distanța parcursă „din punct de vedere al mezonului”.

$$R. \quad \tau_0 = \frac{s}{v} \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad s_0 = s \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

13. O particulă cu masa de repaus m_0 pleacă din repaus sub acțiunea unei forțe constante F . Să se exprime în funcție de timp, viteza și coordonata.

$$R. \quad v = \frac{Fct}{\sqrt{m_0^2 c^2 + F^2 t^2}}, \quad x = \frac{c}{F} \left[\sqrt{m_0^2 c^2 + F^2 t^2} - m_0 c \right].$$

14. O particulă de sarcină q și masă de repaus m_0 descrie un cerc de rază R într-un cîmp magnetic uniform B . Care este viteza particulei?

$$R. \quad v = \frac{c}{\sqrt{1 + (m_0 q R B)^2}}.$$

MECANICA SOLIDULUI ELASTIC

Un model mai fidel al corpurilor reale este modelul *solidului elastic*, care ține seama de deformațiile corpurilor (valabil pentru deformații nu prea mari).

12.1. TENSIUNILE ȘI DEFORMĂȚILE

Orice corp din natură este mai mult sau mai puțin deformabil. Sub acțiunea forțelor exterioare, în interiorul corpului apar *tensiuni interne*, datorită deformării corpului. Atomii sau ionii care formează corpul se deplasează puțin din pozițiile lor de echilibru; atunci forțele de interacțiune (de legătură) dintre ei se opun acestei deplasări ca forțe interne.

Deformațiile care dispar după suprimarea forțelor care le-au produs, se numesc *elastice*, cele care nu dispar se numesc *plastice*.

Pentru deformații elastice nu prea mari este valabilă legea experimentală a lui Robert Hooke (1635—1703), descoperită în 1660 și publicată în 1676, după care deformațiile sînt proporționale cu tensiunile și reciproc.

Vom considera mai jos numai corpurile *omogene* (aceleași proprietăți fizice în toate punctele corpului — invarianța la *translații*) și *izotrope* (aceleași proprietăți fizice în toate direcțiile — invarianța la *rotații*). Astfel sînt materialele policristaline (de exemplu, metalele), formate din microcristale orientate haotic.

Deformațiile elastice se împart în patru categorii: a) întindere (tracțiune) sau comprimare (compresiune), b) forfecare (luncare), c) flexiune (încovoire) și d) torsiune (răsucire).

12.2. TRACȚIUNEA (ÎNTINDEREA) BAREI

a) Fie o bară de lungime inițială (nedeformată) l_0 și secțiune transversală inițială (nedeformată) S_0 supusă la o forță de întindere F (fig. 12.1). Dacă reprezentăm grafic tensiunea elastică (efortul unitar) $\sigma = F/S_0$ în

funcție de deformație (alungire relativă) $\varepsilon = \Delta l/l_0$, obținem curba experimentală din fig. 12.1, care este asemenea (proporțională) cu curba forței de tracțiune F în funcție de alungirea barei $\Delta l = l - l_0$.

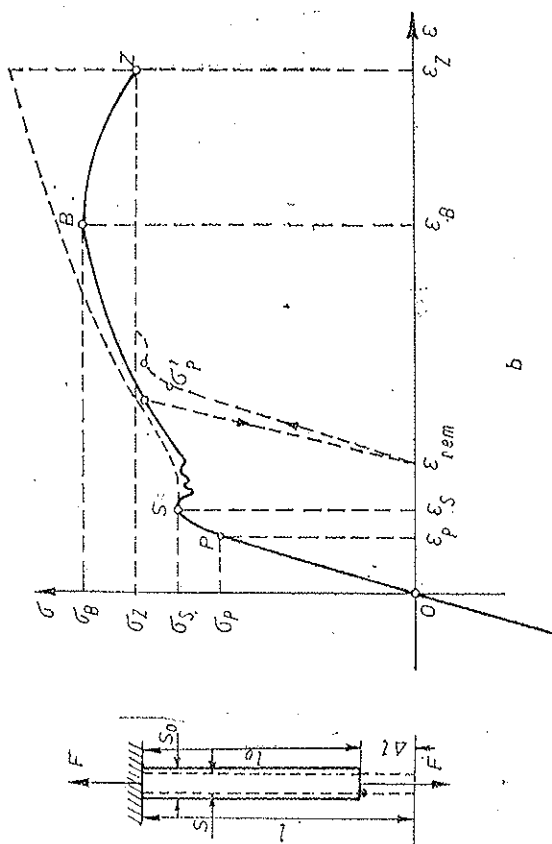


Fig. 12.1

Porțiunea rectilinie OP reprezintă legea lui Hooke:

$$\sigma = E\varepsilon \quad \text{sau} \quad \frac{F}{S_0} = E \frac{\Delta l}{l_0} = E \frac{l - l_0}{l_0}, \quad (12.1)$$

$$[E] = \frac{[F]}{[S]} = 1 \text{ N/m}^2 \text{ în SI}, \quad (12.2)$$

unde E este *modulul de elasticitate* (Young) ($E \approx 2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ la metale). Punctul P (ε_P , σ_P) reprezintă *limita de proporționalitate* (limita domeniului Hooke). Deformațiile elastice se întind însă de obicei ceva mai departe de limita de proporționalitate, până la *limita de elasticitate*, după care începe domeniul deformațiilor plastice.

Punctul critic S (ε_S , σ_S) reprezintă *limita de curgere sau de fluiditate*. Dincolo de această limită deformațiile cresc neregulat fără vreo solicitare suplimentară; materialul „curge”; este regiunea de prelucrare plastică a metalelor.

Mai departe, după terminarea curgerii, tensiunea crește din nou odată cu deformarea, până la *limita de rezistență* B (ε_B , σ_B) când începe o gătuire pronunțată a barei într-un anumit loc și ruperea ei, corespunzător punctului Z (ε_Z , σ_Z).

Dacă am raporta forța de tracțiune F nu la secțiunea inițială S_0 ci la secțiunea reală S (care se micșorează fiindcă bara se subțiază), atunci am obține o curbă monoton crescătoare (punctată).

Dacă înlăturăm forța de întindere într-un punct din regiunea deformărilor plastice, corpul rămâne cu o deformare remanentă ε_{rem} . La o nouă experimentare a probei se constată că limita de proporționalitate crește: $\sigma_p > \sigma_p'$. Acesta este fenomenul de *întărire* a materialului prin prelucrarea sa (deformare plastică) la rece.

b) Experiența arată că în timpul întinderii barei, dimensiunile sale transversale se micșorează; bara se contractă și această contracție este proporțională cu alungirea:

$$\frac{\Delta b}{b_0} = -\mu \frac{\Delta l}{l_0} = -\mu \varepsilon = -\mu \frac{\sigma}{E}, \quad (12.3)$$

unde μ este *coeficientul lui Poisson* (adimensional) (pentru metale $\mu \approx 0,3$ sau $1/3$).

Relații analoge celor de mai sus se aplică și comprimării. În acest caz $\varepsilon < 0$ ($\Delta l < 0$), $\Delta b > 0$ și σ se consideră negativ (în locul contracției transversale Poisson avem acum o umflare transversală Poisson).

Variația relativă de volum este

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{S_0(1 - \mu\varepsilon)^2 l_0(1 + \varepsilon) - S_0 l_0}{S_0 l_0} \approx \varepsilon(1 - 2\mu), \quad (12.4)$$

unde am neglijat termenii superiori în ε , deoarece $\varepsilon \ll 1$. Vom vedea mai jos că totdeauna $1 - 2\mu > 0$, astfel încît volumul crește prin tracțiune ($\varepsilon > 0$), respectiv scade prin comprimare ($\varepsilon < 0$).

c) *Lucrul mecanic* efectuat de forța aplicată și „îmagazinat” în bară sub formă de energie potențială de deformare este

$$W = \int_{l_0}^l F dl = \int_{l_0}^l \sigma S_0 d(l - l_0) = \int_0^\varepsilon \sigma S_0 l_0 d\left(\frac{l - l_0}{l_0}\right) = S_0 l_0 \int_0^\varepsilon \sigma d\varepsilon$$

sau raportat la volumul inițial *nedeformat*:

$$\frac{W}{V_0} = \int_0^\varepsilon \sigma d\varepsilon. \quad (12.5)$$

Pe graficul $\sigma - \varepsilon$ acest lucru mecanic pe unitatea de volum sau *densitatea de energie* potențială este dat(ă) de aria mărginită de curba tensiunii elastice, axa deformațiilor elastice și ordonata deformației finale ε .

În domeniul elastic este valabilă legea lui Hooke $\sigma = E\varepsilon$, astfel încît integrarea dă energia elastică pe unitatea de volum:

$$\frac{W}{V_0} = \int_0^\varepsilon \sigma d\varepsilon = E \int_0^\varepsilon \varepsilon d\varepsilon = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E}. \quad (12.6)$$

Prin urmare, în fiecare unitate de volum a corpului se „îmagazinează”, așfel la întindere cît și la comprimare, o energie potențială proporțională cu pătratul deformației elastice sau cu pătratul tensiunii elastice.

Întinderea sau comprimarea barei dă deformății omogene, adică toate fibrele longitudinale ale barei sînt deformate identic. În cazul *încoșierii* unei bare avem deformații *neomogene*: fibrele interioare (spre concavitate) sînt comprimate, în timp ce fibrele exterioare (spre convexitate) sînt întinse, și există fibre neutre de lungime neschimbată.

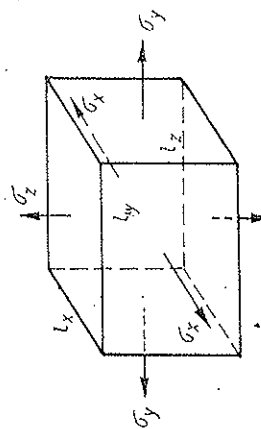


Fig. 12.2

12.3. ÎNTINDEREA SAU COMPRIMAREA PE TOATE FEȚELE

a) Fie un paralelipiped supus întinderii sau comprimării pe toate fețele sale (fig. 12.2). Deformația rezultantă este o suprapunere a deformațiilor generate de cele 3 solicitări pe cele 3 direcții perpendiculare (deformații presupuse mici). Ca urmare a solicitării σ pe o direcție, rezultă o alungire pe aceea direcție și o contracție transversală Poisson pe celelalte două direcții perpendiculare (transversale), astfel încît pentru cele 3 solicitări rezultă următorul tablou al deformațiilor:

Tabloul deformațiilor elastice ε

σ	Axa	Ox	Oy	Oz
σ_x		σ_x/E	$-\mu\sigma_x/E$	$-\mu\sigma_x/E$
σ_y		$-\mu\sigma_y/E$	σ_y/E	$-\mu\sigma_y/E$
σ_z		$-\mu\sigma_z/E$	$-\mu\sigma_z/E$	σ_z/E

Prin însumare, găsim deformațiile rezultante pe fiecare direcție:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l_x}{l_{0x}} = \frac{\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)}{E}, \quad \varepsilon_y = \frac{\Delta l_y}{l_{0y}} = \frac{\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)}{E}, \quad (12.7)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta l_z}{l_{0z}} = \frac{\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)}{E}.$$

Deformațiile fiind considerate mici, le putem asimila cu diferențialele, astfel încît pentru variația de volum avem:

$$V = l_x l_y l_z, \quad \ln V = \ln l_x + \ln l_y + \ln l_z,$$

$$\frac{dV}{V} = \frac{dl_x}{l_x} + \frac{dl_y}{l_y} + \frac{dl_z}{l_z} \rightarrow \varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\Delta l_x}{l_{0x}} + \frac{\Delta l_y}{l_{0y}} + \frac{\Delta l_z}{l_{0z}},$$

$$\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (12.8)$$

Deformația elastică (relativă) a volumului, ε_V , se poate obține și astfel:
Din (12.7) avem

$\Delta l_x = \varepsilon_x l_{0x}$ sau $l_x - l_{0x} = \varepsilon_x l_{0x}$ sau $l_x = (1 + \varepsilon_x) l_{0x}$,
de aceea volumul deformat este

$$V = l_x l_y l_z = l_{0x} l_{0y} l_{0z} (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z).$$

De aceea în domeniul elastic deformațiile sînt mici ($\varepsilon \sim 1\%$ sau $\varepsilon \ll 1$),
avem în primă aproximație:

$$V = V_0(1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) \approx V_0(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z),$$

de unde

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{V - V_0}{V_0} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z,$$

adică formula precedentă (12.8).

b) În cazul comprimării *uniforme* de tip *hidrostatic* a unui corp, se definește *coeficientul de compresune* (sau de compresibilitate) prin relația:

$$\bar{\kappa} = -\frac{1}{V_0} \frac{\Delta V}{\Delta p}, \quad \kappa = -\frac{1}{V_0} \frac{\partial V}{\partial p}, \quad (12.9)$$

adică κ este numeric egal cu descreșterea unității de volum la o creștere egală cu unitatea a presiunii.

Experiența arată că totdeauna la o creștere a presiunii volumul scade, deci $\kappa > 0$.

Inversul lui κ se numește *modulul de compresune*:

$$K = \frac{1}{\kappa} \stackrel{\text{def}}{=} -V_0 \frac{\partial p}{\partial V}. \quad (12.10)$$

Formulele (12.7-8) dau în acest caz ($\Delta p > 0$ înseamnă o comprimare, deci $\sigma < 0$, adică $\sigma = -\Delta p$):

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma = -\Delta p, \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon = -\frac{1 - 2\mu}{E} \Delta p, \quad (12.11)$$

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V_0} = 3\varepsilon = -3 \frac{1 - 2\mu}{E} \Delta p = -\kappa \cdot \Delta p, \quad (12.12)$$

$$\kappa = \frac{3(1 - 2\mu)}{E}, \quad K = \frac{1}{\kappa} = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}. \quad (12.13)$$

Cum $\kappa > 0$, rezultă $1 - 2\mu > 0$, deci totdeauna $\mu < 0,5$.

La metale $K \cong 1,5 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$, la apă $\cong 2 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$, la mercur $\cong 2,6 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$.

Energia elastică „îmagazinată” prin deformare, pe unitatea de volum (densitatea de energie) este

$$\frac{W}{V_0} = \frac{1}{2} (\varepsilon_x \sigma_x + \varepsilon_y \sigma_y + \varepsilon_z \sigma_z) = \frac{1}{2} \varepsilon_V \sigma = \frac{1}{2} K \varepsilon_V^2 = \frac{(\Delta p)^2}{2K}. \quad (12.14)$$

c) Să considerăm acum comprimarea unei bare, prinsă lateral atît de rigid, încît dimensiunile transversale nu se pot schimba (de exemplu, comprimările și rarefierile în unda sonoră care se propagă într-un mediu elastic nemărginit, nu pot produce contracția sau umflarea transversală Poisson). Datorită reacțiunii pereților laterali, care împiedică umflarea (sau contracția) transversală a barei, în bară apar tensiuni elastice transversale a căror mărime se determină din condiția ca dimensiunile transversale să nu se schimbe.

Fie deci tensiunea σ_z în direcția axei Ox , atunci trebuie să avem:

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)}{E} = 0, \quad \varepsilon_z = \frac{\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)}{E} = 0,$$

de unde

$$\sigma_y + \sigma_z = \frac{2\mu}{1 - \mu} \sigma_x, \quad (12.15)$$

iar pentru deformația longitudinală ε_x rezultă:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)}{E} = \frac{1 - \mu - 2\mu^2}{E(1 - \mu)} \sigma_x = \\ &= \frac{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}{E(1 - \mu)} \sigma_x = \frac{1}{E'} \sigma_x \end{aligned} \quad (12.16)$$

sau

$$\sigma_x = E' \varepsilon_x, \quad \text{unde } E' = E \frac{1 - \mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}. \quad (12.17)$$

Pentru $\mu \approx 0,3$ (metale), avem aproximativ $E' \approx 1,55E$.

Vom folosi acest rezultat la studiul propagării sunetului în medii elastice nemărginite.

12.4. FORFECAREA (SAU LUNECAREA)

În cazul întinderii sau comprimării variază volumul corpului (12.4). Există deformații în care *volumul rămîne constant*, schimbîndu-se numai forma. Forfecarea sau lunecarea este deformarea în care unele straturi alunecă peste altele. Dacă aplicăm două cupluri de forțe la două perechi de fețe

opuse ale unui paralelipiped (fig. 12.3), straturile se vor deplasa unele față de altele. Pentru deformări mici, experiența dă o proporționalitate între unghiul γ (în rad) și efortul tangențial $\tau = F/S_0$:

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \text{tg } \gamma \approx \gamma = \frac{\tau}{G},$$

$$\tau = G\gamma \text{ (legea Hooke); (12.18)}$$

$$[G] = 1 \text{ N/m}^2 \text{ în SI, (12.19)}$$

unde G se numește *modulul de lunecare sau de forfecare*.

Deformația de forfecare este echivalentă cu întinderea fibrelor paralele cu diagonala AC și comprimarea fibrelor paralele cu cealaltă diagonală BD . Tensiunea de întindere și cea de comprimare sunt egale respectiv cu $\pm \tau$, deoarece proiecția celor două forțe F pe direcția AC sau BD dă $\pm 2F \cos 45^\circ = \pm F\sqrt{2}$, iar aria secțiunii diagonale la care sunt raportate este $S_0\sqrt{2}$, de unde $\sigma = \pm F\sqrt{2}/S_0\sqrt{2} = \pm \tau$.

Alungirea diagonalei AC sau comprimarea diagonalei BD sunt egale cu $\epsilon = \pm \gamma/2$, deoarece alungirea sau comprimarea absolută a diagonalei este $\pm \Delta l \cos 45^\circ = \pm \Delta l/\sqrt{2}$, iar lungimea diagonalei, la care trebuie raportată alungirea este $l_0\sqrt{2}$, de unde $\epsilon = \pm \Delta l/2l_0 = \pm \gamma/2$. Dar deformația de alungire a diagonalei AC , $\epsilon = \gamma/2$, se compune din deformația de alungire $\sigma/E = \tau/E$ datorită întinderii ei cu tensiunea $\sigma = \tau$ și din umflarea Poisson $\mu\tau/E$ datorită comprimării transversale $\sigma = -\tau$ pe direcția BD :

$$\epsilon = \frac{\gamma}{2} = \frac{\tau}{E} + \frac{\mu\tau}{E} = (1 + \mu) \frac{\tau}{E} \quad (12.20)$$

și cum $\gamma = \tau/G$, rezultă

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad (12.21)$$

(pentru materiale obișnuite, $G \approx 0,4E$).

Deformația de forfecare apare la tăierea tablei, la solicitarea niturilor etc. (fig. 12.4).

Deformația de lunecare de mai sus este omogenă. O deformație de lunecare *neomogenă* este răsucirea sau *torsiunea* unei tije sau fir.

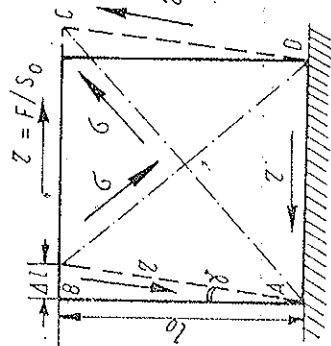
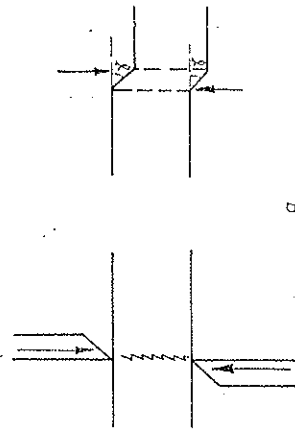
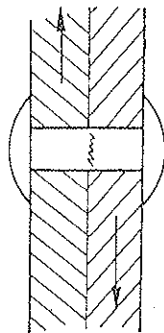


Fig. 12.3



a



b

Fig. 12.4

Prin urmare, proprietățile elastice ale unui solid *izotrop* sunt caracterizate numai de două constante elastice independente, de exemplu, E și G . În cazul corpurilor *anizotrope* însă (cristalele) sunt necesare mai multe constante: de la 3 la cristalele cubice, până la 21 la cristalele triclinoice.

12.5. ÎNCOVOIEREA (FLEXIUNEA)

12.5.1. FORȚE INTERNE

Vom studia încovoierea barelor, considerând că dimensiunile lor transversale sînt mici față de lungimea lor, iar deformațiile sînt mici și rămîn în domeniul elastic (legea Hooke). Presupunem de asemenea că toate forțele sînt verticale și acționează în planul de simetrie vertical, longitudinal, al barei. Atunci în orice secțiune a barei forțele interne se reduc la o forță transversală (tăietoare) Q și la un moment încovoietor (cuplu) M .

În adevăr, să sectionăm bara la distanța x de capătul său stîng A și să îndepărtăm partea din dreapta. Deoarece partea stîngă a fost și este în echilibru, înscămînă că partea dreaptă a acționat asupra celei stîngi prin forțe interne în secțiunea S , care se reduc la o rezultantă Q aplicată în centrul secțiunii S și un cuplu M .

Desigur că și reciproc, conform principiului III al forțelor reciproce partea stîngă acționează asupra celei drepte în aceeași secțiune S printr-o forță și un cuplu de sensuri opuse.

Din condițiile de echilibru pentru oricare parte a barei rezultă:

Forța transversală (tăietoare) Q și cuplul (momentul) M dintr-o secțiune S a barei reprezintă rezultanta și momentul resultant față de centrul secțiunii S al forțelor externe aplicate părții drepte a barei (sau minus rezultanta și minus momentul resultant al forțelor externe aplicate părții stîngi a barei).

(Evident, se poate face convenția schimbînd rolul părților.)

12.5.2. FORȚA TĂIETOARE ȘI MOMENTUL ÎNCOVOIETOR

Alegem axele ca în fig. 12.5. Să izotăm un element dx din bară, supus numai la forțe distribuite continuu q (forța pe unitatea de lungime a barei)

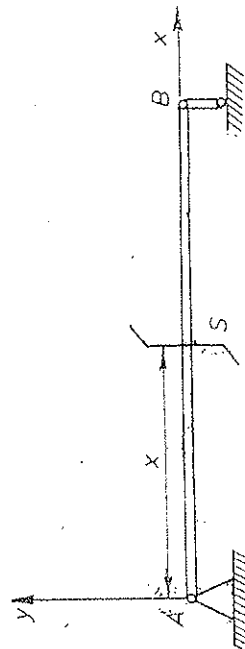


Fig. 12.5

(fig. 12.6) (în fig. 12.6, $q < 0$). Din condiția de echilibru pentru rezultantă (pe axa Oy) rezultă:

$$-Q + q dx + Q + dQ = 0, \text{ de unde } \frac{dQ}{dx} = -q. \quad (12.22)$$

Derivata forței transversale (tăietoare) Q în raport cu abscisa x este egală cu minus densitatea liniară q a forței distribuite.

Din condiția de echilibru pentru momente (M este considerat pozitiv în sens trigonometric!) rezultă (luând momentele față de secțiunea stângă):

$$-M + (Q + dQ) dx + q dx \frac{dx}{2} + M + dM = 0,$$

de unde, neglijând termenii infinitesimali superiori (care se anulează):

$$\frac{dM}{dx} = -Q. \quad (12.23)$$

Derivata momentului încovoiător M în raport cu abscisa x este egală cu forța transversală (tăietoare) cu semn schimbat $-Q$.

Evident, formulele (12.22—23) nu se aplică pentru secțiunile unde lucrează forțe externe și momente externe concentrate (acolo derivatele sînt discontinue).

Din (12.22—23) rezultă:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -\frac{dQ}{dx} = q. \quad (12.24)$$

12.5.3. DEFORMAȚII ȘI TENSIUNI

Prin încovoierea unei bare fibrele longitudinale de pe partea convexă se alungesc, iar cele de pe partea concavă se contractă. Există un strat în

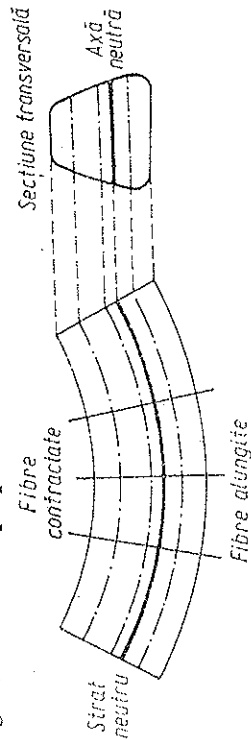


Fig. 12.7

care fibrele doar se curbează dar nu-și schimbă lungimea — stratul neutru (fig. 12.7). Intersecția sa cu planul secțiunii transversale dă axa neutră (Oz).

Secțiunile transversale, plane înainte de deformare, rămîn plane și după deformare, ele doar se rotesc în jurul axei neutre rămînd perpendiculară pe stratul neutru (ipoteza lui Bernoulli).

Să calculăm deformarea unei fibre situate la distanța y de stratul neutru (fig. 12.18). Fie R — raza de curbura a stratului neutru, atunci $dx = R d\theta$

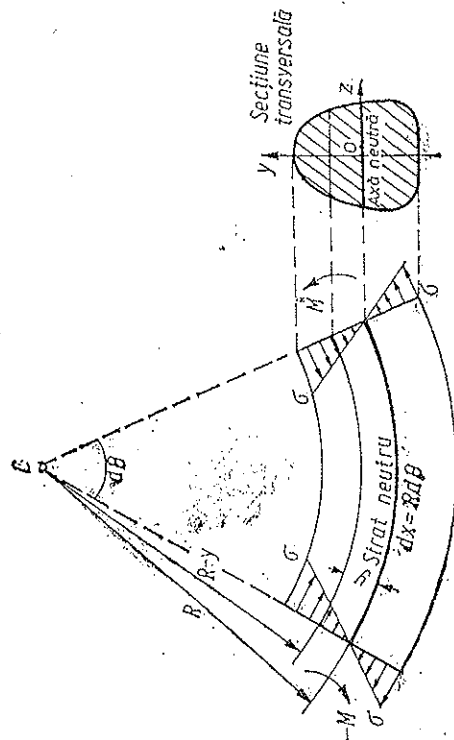


Fig. 12.8

și alungirea va fi $(R - y)d\theta = R d\theta = -y d\theta$. Raportînd-o la lungimea inițială nedeformată $dx = R d\theta$, obținem deformarea elastică:

$$\varepsilon = -\frac{y}{R}. \quad (12.25)$$

deformațiile fibrelor sînt direct proporționale cu distanțele lor pînă la stratul neutru.

Aplicînd legea lui Hooke, găsim tensiunea elastică

$$\sigma = E\varepsilon = -E \frac{y}{R}. \quad (12.26)$$

Pe axa neutră ($y = 0$) tensiunile normale σ sînt nule.

Pe direcția longitudinală Ox tensiunile elastice care acționează într-o secțiune transversală (Oyz) trebuie să dea forța rezultantă nulă:

$$\int \sigma dS = 0, \quad -\int E \frac{y}{R} dS = 0, \quad \int y dS = 0$$

sau

$$y_0 = \frac{1}{A} \int y dS = 0, \quad (12.27)$$

(A — aria secțiunii transversale), ceea ce înseamnă că *axa neutră trece prin centrul de greutate al secțiunii*.

Cum forțele elementare normale σdS aplicate secțiunii transversale au rezultanta nulă (12.27), ele dau un *cuplu* rezultat al cărui moment este chiar momentul încovoitor (fig. 12.9):

$$-\int \sigma dS y = M, \quad \int \frac{E y^2}{R} dS = M, \quad M = \frac{EJ}{R}, \quad (12.28)$$

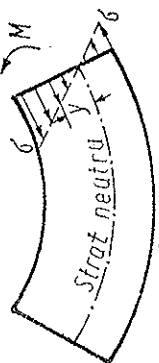


Fig. 12.9

$$J = \int y^2 dS, \quad [J] = m^4, \quad (12.29)$$

unde J se numește *momentul de inerție geometrică al secțiunii față de axa neutră*.

Momentele de inerție geometrice se calculează analog celor fizice I . În fig. 12.10 sunt date câteva secțiuni cu momentele lor de inerție geometrice;

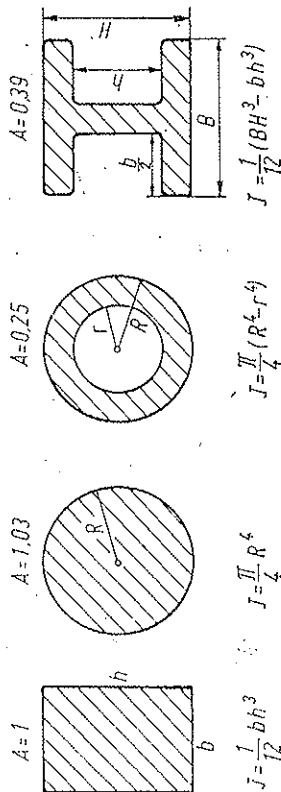


Fig. 12.10

pentru momente de inerție egale sînt comparate ariile lor A ; din punctul de vedere al economiei de material, secțiunea mai economică este cea înelară.

12.5.4. ECUAȚIA LINIEI ELASTICE

Sub acțiunea forțelor aplicate axei barei se curbează, fiindcă centrele secțiunilor transversale se deplasează, iar secțiunile însele se rotesc în jurul axelor lor neutre. Vom presupune deplasări *mici*.

Axa barei ia, prin încovoire, forma unei curbe plane numită *linie elastică*.

Raza de curbură a stratului neutră, deci și a liniei elastice, este dată de (12.28). Pe de altă parte, din matematică se cunoaște expresia curburii unei curbe plane:

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2 y / dx^2}{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}} \approx \frac{y''}{[1 + y'^2]^{3/2}} \approx \frac{d^2 y}{dx^2} = y'', \quad (12.30)$$

unde am neglijat $dy/dx = \tan \theta \approx \theta \ll 1$, considerînd că unghiul de încovoire este mic.

Prin urmare, ecuația diferențială a liniei elastice este

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = M, \quad (12.31)$$

Prin integrare obținem ecuația liniei elastice $y = f(x)$ în care vor apărea două constante de integrare, care se determină din condițiile la limită.

12.5.5. BARĂ ÎNCASTRATĂ

Presupunem la capătul barei o forță verticală P . Momentul încovoitor într-o secțiune x este (fig. 12.11):

$$M = -P(l - x).$$

Atunci (12.31) dă ecuația diferențială:

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = P(x - l),$$

de unde

$$EJ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} P x^2 - P l x + C.$$

Pentru $x = 0$ avem $y = 0$, $dy/dx = 0$, deci $C = 0$.

$$EJ y = \frac{1}{6} P x^3 - \frac{1}{2} P l x^2 + C'.$$

Pentru $x = 0$ avem $y = 0$, deci $C' = 0$. Ecuația axei barei devine

$$EJ y = \frac{1}{2} P x^2 \left(\frac{x}{3} - l \right), \quad (12.32)$$

de unde săgeata

$$f = -\frac{Pl^3}{3EJ}. \quad (12.33)$$

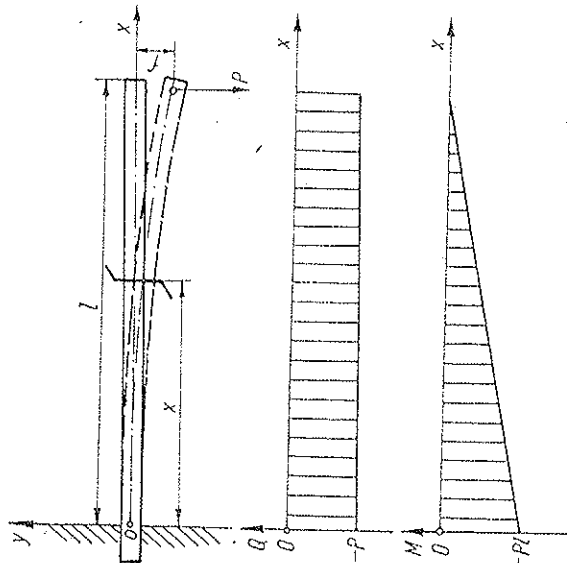


Fig. 12.11

12.5.6. BARA SPRIJINITĂ LA CAPETE

Presupunem la mijlocul barei o forță verticală P (fig. 12.12), atunci momentul încovoitor:

$$M = \frac{P}{2} x \text{ pentru } x \leq l/2, \quad M = \frac{P}{2} (l - x) \text{ pentru } x \geq l/2$$

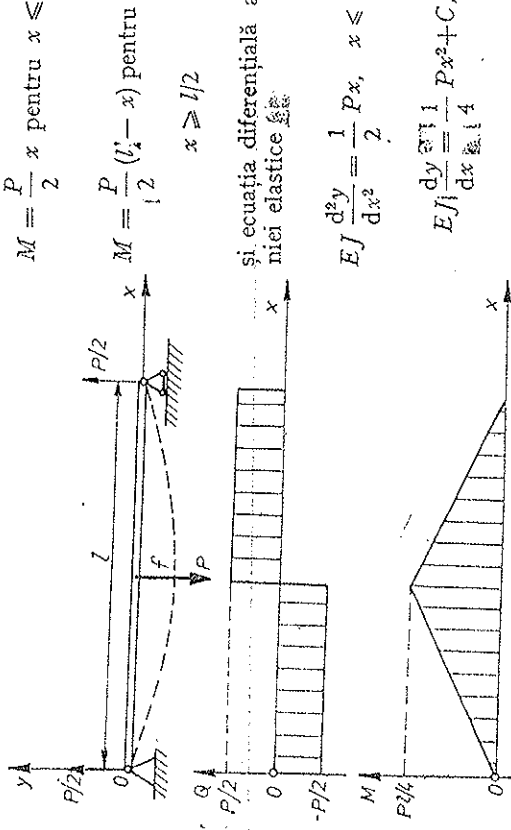


Fig. 12.12

$$EJ y = \frac{1}{12} Px^3 - \frac{1}{16} Pl^2 x + C',$$

dar pentru $x = 0, y = 0$, deci $C' = 0$;

$$EJ y = \frac{1}{4} Px \left(\frac{x^2}{3} - \frac{l^2}{4} \right), \text{ pentru } x \leq l/2. \quad (12.34)$$

Pentru cealaltă jumătate a barei curba elastică este evident simetrică cu aceasta.

Săgeata este ($x = l/2$):

$$f = -\frac{1}{48} \frac{Pl^3}{EJ}. \quad (12.35)$$

Formulele (12.33) și (12.35) permit, de exemplu, calculul modului E .

12.6. TORSIUNEA

Fie o tijă, un tub sau un fir răsucit (fig. 12.13). Baza superioară a suferit o lunecare față de baza inferioară, dreapta AB s-a rotit în poziția AB' , unghiul γ fiind unghiul de lunecare la distanța r de axă:

$$\frac{BB'}{AB} = \tan \gamma \approx \gamma = \frac{r\theta}{l}. \quad (12.36)$$

Acestei lunecări îi corespunde o tensiune tangențială

$$\tau = G\gamma = G\theta r/l. \quad (12.37)$$

Forța corespunzătoare dF aplicată ariei elementare dS va fi $dF = \tau dS$ și momentul ei față de axă:

$$dM = r dF = G \frac{\theta}{l} r^2 dS.$$

Momentul de torsiune total, aplicat bazei superioare rezultă de aici prin integrare:

$$M = \frac{G}{l} \theta \int r^2 dS = \frac{GJ_p}{l} \theta = C\theta, \quad (12.38)$$

$$J_p \stackrel{\text{def}}{=} \int r^2 dS, \quad (12.39)$$

$$C = \frac{GJ_p}{l}, \quad [C] = \text{IN} \cdot \text{m/rad}, \quad (12.40)$$

Fig. 12.13

unde J_p este momentul de inerție geometric polar al secțiunii, iar C constanta de torsiune.

Pentru un tub cilindric de raze R, r :

$$J_p = \int_0^R r^2 \cdot 2\pi r dr = \frac{\pi}{2} (R^4 - r^4), \quad (12.41)$$

în particular, pentru un fir sau tijă cilindrică:

$$J_p = \frac{\pi}{2} R^4, \quad C = \frac{\pi}{2l} GR^4. \quad (12.42)$$

Momentul de torsiune aplicat este proporțional cu unghiul de răsucire, iar constanta de torsiune este proporțională cu puterea a 4-a a razei firului. Lucrul mecanic efectuat la răsucire va fi

$$W = \int M d\theta = \frac{1}{2} C \theta^2 = \frac{1}{2} M \theta = \frac{M^2}{2C}. \quad (12.43)$$

Dacă printr-un arbore se transmite o putere P , atunci unghiul de răsucire a arborelui va fi

$$\theta = \frac{M}{C} = \frac{P}{C\omega} = \frac{P}{\omega} \frac{2l}{\pi G R^4}. \quad (12.44)$$

Răscuirea unui fir este folosită în *balanța de torsione* pentru măsurarea momentului unui cuplu de forțe foarte slab, de exemplu, în experiențele lui Cavendish. Se folosesc fire subțiri de cuarț de $1 - 100 \mu\text{m}$, iar unghiul de răscuire se măsoară cu ajutorul deplasării unui spot luminos reflectat de o oglindă foarte mică fixată pe fir. Sensibilitatea este extrem de mare.

12.7. FRECAREA LA ROSTOGOLIRE

O bilă foarte dură (de exemplu, din sticlă), lansată de-a lungul unui plan orizontal dur (de exemplu, tot din sticlă) se rostogolește mult timp aproape uniform. Dacă bila ar fi perfect dură și planul orizontal perfect dur și n-ar exista frecarea cu aerul, bila s-ar rostogoli la nesfârșit rectiliniu uniform, deoarece nu apare nici un cuplu de frinare.

În realitate, și bila și planul se *deformează*, în fața bilei se formează conținut un „val” (vizibil, de exemplu, la rostogolirea unui tăvălug greu peste o bucată de cauciu moale) și punctul de aplicare al rezultantei N a forțelor de reacțiune normale se deplasează puțin înainte cu distanța f , dând un moment de frinare (fig. 12.14). Totodată apare o forță tangențială de frecare la rostogolire F_f , care se opune luncării.

Pe măsură ce forța de tracțiune F crește, se deplasează înainte și forța de reacțiune normală N până când corpul pornește, după care această deplasare f rămâne practic constantă. O putem găsi din condiția de rostogolire uniformă:

$$F - F_f = 0, \quad F_f R - Nf = 0, \quad f = R \frac{F_f}{N}, \quad [f] = 1 \text{ m} \quad (12.45)$$

și reciproc, *forța de frecare la rostogolire*

$$F_f = f \frac{N}{R}, \quad (\text{legea lui Coulomb}), \quad (12.46)$$

unde f se numește *coeficient de frecare la rostogolire* (el este de ordinul unui milimetru). Se vede că forța de frecare la rostogolire F_f este proporțională cu apăscarea normală, ca și forța de frecare la luncare F_f , dar este mult mai mică. De exemplu, la o roată de camion cu raza $R = 0,50 \text{ m}$, pe teren dur:

$$F_f = \mu N, \quad F_f = f \frac{N}{R}$$

$$F_f/F_f = \mu R/f = 0,4 \cdot 0,50 : (4 \cdot 10^{-3}) = 50,$$

iar pentru roțile de tren: $F_f/F_f \approx 2000$.

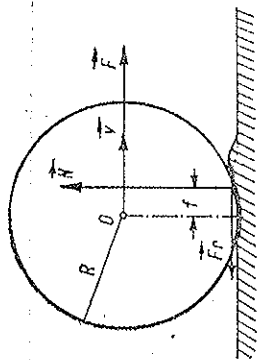


Fig. 12.14

de frinare (fig. 12.14). Totodată apare o forță tangențială de frecare la rostogolire F_f , care se opune luncării.

Pe măsură ce forța de tracțiune F crește, se deplasează înainte și forța de reacțiune normală N până când corpul pornește, după care această deplasare f rămâne practic constantă. O putem găsi din condiția de rostogolire uniformă:

Coeficienții de frecare la rostogolire

Roadă de fier pe cale ferată	...	$3 \cdot 10^{-3}$
Roadă de fier pe asfalt	...	$1 \cdot 10^{-3}$
Cauciuc pe teren dur	...	$4 \cdot 10^{-3}$

PROBLEME

1. O bară omogenă subțire de lungime l și masă m se rotește uniform cu viteza unghiulară ω într-un plan orizontal în jurul unui capăt fix (fig. 12.15). Să se afle tensiunea elastică F

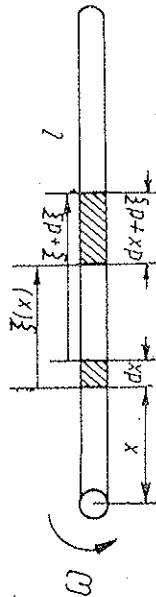


Fig. 12.15

din bară la distanța x de capătul fix și reacțiunea R a lagărului. Cunoșcând secțiunea A a barei și modulul de elasticitate E , să se afle alungirea barei.

$$R. \quad F(x) = \frac{m}{2l} \omega^2 (x^2 - l^2), \quad R = -\frac{1}{2} m \omega^2 l, \quad \Delta l = \frac{m \omega^2 l^2}{5AE}$$

2. O bară subțire omogenă de masă m și lungime l oscilează liber cu amplitudinea unghiulară α în planul vertical în jurul capătului superior fixat într-o articulație (fig. 12.16). Să se afle în funcție de unghiul de deviație θ : a) viteza și accelerația unghiulară a barei; b) forța de presiune exercitată de bară asupra articulației; c) momentul încovoiător la distanța x de articulație. Care este secțiunea periculoasă?

$$R. \quad a) \omega^2 = \frac{3g}{l} (\cos \theta - \cos \alpha), \quad \alpha = -\frac{3g}{2l} \sin \theta;$$

$$b) F_f = \frac{1}{2} mg (5 \cos \theta - 3 \cos \alpha),$$

$$F_\theta = -\frac{1}{4} mg \sin \theta;$$

$$c) M = \frac{mg}{4l^2} (l - x)^2 x \sin \theta; \quad M_{\max} = \frac{1}{9} mg l \sin \theta \text{ pentru } x = l/3.$$

Fig. 12.16

3. O bară de lungime l , secțiune A și masă m este suspendată la capătul superior. Să se afle alungirea barei datorită propriilor sale greutate.

$$R. \quad \Delta l = \frac{mg l}{2EA}$$

4. O bară uniformă de lungime l și moment geometric J se sprijină liber la capete pe două rezeme, fiind încărcată cu o forță uniform distribuită q ca în fig. 12.17. Să se afle forța tăietoare maximă, momentul încovoitor maxim și săgeata.

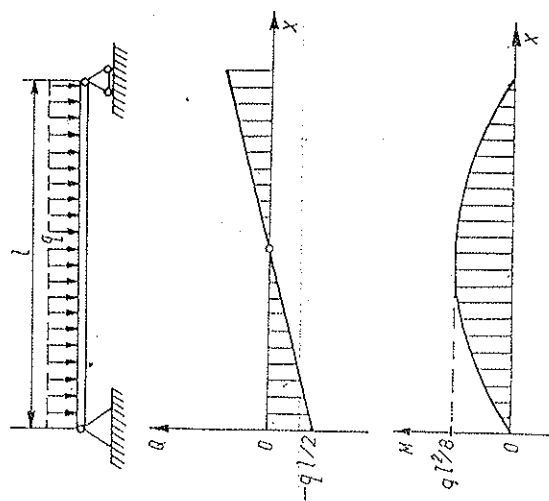


Fig. 12.17

R. $Q_m = -\frac{1}{2}ql$, $M_m = \frac{1}{8}ql^2$, $f = -\frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ}$

5. O bară uniformă de lungime l și moment geometric J este încărcată în un capăt și încărcată cu o forță uniform distribuită q , ca în fig. 12.18. Să se afle forța tăietoare maximă, momentul încovoitor maxim și săgeata.

R. $Q_m = -ql$, $M_m = -\frac{1}{2}ql^2$, $f = -\frac{ql^4}{8EJ}$

6. Ce presiune interioară poate suporta un tub cilindric, respectiv un balon sferic, dacă raza este R , grosimea pereților d ($d \ll R$) și tensiunea elastică de rupere σ_r ?

R. $p \cong \sigma_r d / R$, $p \cong 2\sigma_r d / R$.

7. Celui mecanic trebuie efectuat pentru a curba într-un cerc o bandă de oțel de lungime l , lățime b și grosime h , cunoscând modulul E ? Se consideră deformările elastice.

R. $W = \frac{\pi^2}{6l} E b h^3$

Fig. 12.18

CAPITOLUL 13

MECANICA FLUIDELOR

Problema fundamentală a mecanicii fluidelor este determinarea distribuției presiunilor și vitezelor într-un fluid.

13.1. STATICA FLUIDELOR

Într-un fluid în repaus presiunea este izotropă. Pe fiecare element de suprafață dS în interiorul fluidului se exercită o forță perpendiculară pe suprafață și independent de orientarea elementului de suprafață: $d\vec{F} = p d\vec{S}$.

13.1.1 PRESIUNEA HIDROSTATICĂ

Datorită greutateii lor, părțile de fluid exercită presiuni unele asupra altora. Variația de presiune dp între două suprafețe de nivel z , $z + dz$ este dată de greutatea părții de fluid de grosime dz , exercitată pe unitatea de suprafață (fig. 13.1):

$$dp = -\rho g dz, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g,$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \right). \quad (13.1)$$

Mai general, presiunea p într-un fluid este o funcție de punct, $p = p(x, y, z)$. Variația ei se datorește greutateii părților de fluid, adică prezenței cîmpului gravitațional $\vec{F} = \vec{g}$ (a forțelor masice). Gradientul presiunii, care caracterizează variația presiunii în spațiu și este dat de derivatele parțiale ale acesteia, este un vector perpendicular pe suprafețele de pre-

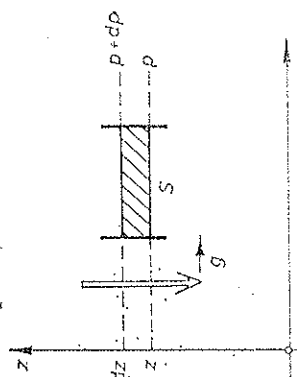


Fig. 13.1

siune constantă (în sensul creșterii presiunii), deci este perpendicular pe suprafețele de câmp gravitațional constant în sensul acestui câmp. În cazul particular de mai sus aceste suprafețe sînt orizontale și câmpul este vertical în jos, de aceea gradientul presiunii s-a redus numai la componenta verticală (13.1) (în SC ales). În general avem

$$\text{grad } p = \frac{\partial p}{\partial r} = \rho \vec{g} = \rho \vec{F} = \frac{d\vec{F}}{dV} \quad (13.2)$$

gradientul presiunii este egal cu forța pe unitatea de volum (densitatea volumică de forță).

La lichide densitatea ρ este practic constantă, astfel încît (13.1) dă prin integrare:

$$p_2 - p_1 = -\rho g(z_2 - z_1) \text{ sau } |\Delta p| = \rho gh, \quad (13.3)$$

unde h este grosimea stratului de fluid.

Observație. Presiunea (13.1-3) este numită *hidrostatică* sau *aerostatică* spre a o deosebi de presiunea *cinetică* de la gaze, care se datorește bombardamentului molecular asupra pereților vasului.

13.1.2. UNITĂȚI DE PRESIUNE

Reamintim unitățile de presiune:

$$[p] = \frac{[F]}{[S]} = L^{-1}MT^{-2} = 1 \text{ N/m}^2 \text{ în SI}, \quad (13.4)$$

$$[p] = 1 \text{ dyn/cm}^2 = 1 \text{ barye} = 0,1 \text{ N/m}^2 \text{ în CGS},$$

$$1 \text{ bar} \approx 10^5 \text{ barye} = 1 \text{ Mbar} = 10^5 \text{ N/m}^2.$$

Alte unități tolerate, folosite curent sînt următoarele:

Torrul (sau mm Hg) este egal cu presiunea exercitată de o coloană de mercur înaltă de 1 mm la 0° C și în câmp gravitațional normal (standard). Folosind (13.3) rezultă:

$$1 \text{ Torr} = [\rho gh] = 13,5951 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 9,80665 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 133,322 \text{ N/m}^2 \approx 133,3 \text{ N/m}^2. \quad (13.5)$$

O atmosferă fizică este egală cu 760 Torr:

$$1 \text{ atm} \stackrel{\text{def}}{=} 760 \text{ Torr} = 760 \cdot 133,322 \text{ N/m}^2 = 101325 \text{ N/m}^2 \approx 1,013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 = 1,013 \text{ bar}. \quad (13.6)$$

O atmosferă tehnică este:

$$1 \text{ at} \stackrel{\text{def}}{=} 1 \text{ kgf/cm}^2 = 98066,5 \text{ N/m}^2 \approx 9,8 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2, \\ 1 \text{ at} = 735,392 \text{ Torr} \approx 735 \text{ Torr}, \\ 1 \text{ atm} = 1,03323 \text{ at} \approx 1,033 \text{ at}. \quad (13.7)$$

Milimetrul coloană de apă (mm H₂O):

$$1 \text{ mm H}_2\text{O} \approx 9,8 \text{ N/m}^2; \quad 1 \text{ mm H}_2\text{O} \approx 13,6 \text{ Torr}; \quad (13.8)$$

$$1 \text{ atm} \approx 10,33 \text{ m H}_2\text{O}, \quad 1 \text{ at} \approx 10 \text{ m H}_2\text{O}. \quad (13.9)$$

13.1.3. LEGEA LUI PASCAL

Presiunea exercitată din exterior la suprafața unui lichid incompressibil se transmite cu aceeași intensitate în toate direcțiile în lichid.

Legea poate fi dedusă și teoretic din considerațiile de conservare a energiei: lucrul mecanic efectuat de forța dF_1 pe distanța dx_1 trebuie să fie egal cu lucrul mecanic al forței dF_2 pe distanța dx_2 (fig. 13.2): $dF_1 dx_1 = dF_2 dx_2$, dar din condiția de incompressibilitate: $dS_1 dx_1 = dS_2 dx_2$, de unde împărțind membru la membru, rezultă:

$$dF_1/dS_1 = dF_2/dS_2 = p. \quad (13.10)$$

Cu ajutorul legii lui Pascal se explică funcționarea preselor hidraulice.

13.1.4. LEGEA LUI ARHIMEDE

Un corp cufundat într-un fluid este împins de jos în sus cu o forță egală cu greutatea volumului de fluid dezlucuit de corp.

Pentru demonstrație putem folosi următorul raționament simplu, ingenios și elegant. Să delimităm în interiorul fluidului un volum oarecare V de fluid. Putem presupune de exemplu, că l-am delimitat printr-o peliculă infinit de subțire, imponderabilă, perfect flexibilă și inextensibilă, ceea ce nu modifică cu nimic echilibrul volumului de fluid astfel delimitat, sau putem presupune că acest volum de fluid s-a „solidificat” (fig. 13.3). Asupra acestui volum acționează forța de greutate $\vec{G}_V = m\vec{g}$, precum și forțele de presiune exercitate de restul fluidului, perpendicular pe suprafața ce delimitează volumul V . Deoarece acest volum de fluid este în echilibru, rezultanta tuturor forțelor de presiune exercitate normal pe suprafața sa de restul fluidului trebuie să fie egală în modul și de sens opus cu greutatea \vec{G}_V a fluidului delimitat, cu punctul de aplicație în centrul de greutate al volumului de fluid considerat. Înlocuind acum acest

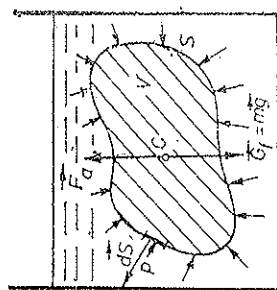


Fig. 13.3

volum de fluid cu volumul *identic* al unui corp oarecare, rezultanta forțelor de presiune exercitate de fluid pe suprafața corpului nu se schimbă cu nimic, adică rămâne aceeași ca înainte, egală în modul și de sens opus cu greutatea volumului de fluid dezlucit de corp, avînd punctul de aplicație în centrul de greutate al volumului de fluid dezlucit (centrul de presiune).

Observație. Legea lui Arhimede poate fi demonstrată matematic pe baza formulei hidrostatice (13.2).

Rezultanta forțelor de presiune:

$$\oint_S (-p) d\vec{S} = \int_V (-\text{grad } p) dV = - \int_V p \vec{g} dV = - \int_V \vec{g} dm = -\vec{G}, \quad (13.11)$$

unde prima integrală reprezintă suma (rezultanta) tuturor forțelor de presiune exercitate pe suprafața închisă oarecare S în interiorul fluidului și care delimitează volumul V . Mai departe am folosit o formulă matematică cunoscută (f — funcție scalară cu derivate continue):

$$\oint_S f d\vec{S} = \int_V \text{grad } f dV. \quad (13.12)$$

Ultima integrală din (13.11) reprezintă greutatea fluidului din interiorul suprafeței închise S .

Rezultanta forțelor de presiune exercitate pe o suprafață închisă în interiorul unui fluid este egală în modul și opusă ca sens cu greutatea volumului de fluid cuprins de acea suprafață.

Momentul rezultat al forțelor de presiune:

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{r} \times d\vec{F} &= \oint_S \vec{r} \times (-p) d\vec{S} = - \oint_S p \vec{r} \times d\vec{S} = - \int_V \text{rot}(\vec{r} p) dV = \\ &= - \int_V \text{grad } p \times \vec{r} dV = - \int_V \vec{r} \times p \vec{g} dV = - \int_V \vec{r} \times \vec{g} dm = - \int_V \vec{r} \times d\vec{G}, \end{aligned} \quad (13.13)$$

unde $\text{rot } \vec{a}$ înseamnă rotorul vectorului \vec{a} :

$$\text{rot } \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \vec{i}(\partial_y a_z - \partial_z a_y) + \vec{j}(\partial_z a_x - \partial_x a_z) + \vec{k}(\partial_x a_y - \partial_y a_x) \quad (13.14)$$

și am folosit următoarele teoreme matematice (\vec{a} — vector cu derivate continue):

$$\oint_S \vec{a} \times d\vec{S} = - \int_V \text{rot } \vec{a} dV, \quad \text{rot}(\vec{f} \vec{a}) = \text{grad } f \times \vec{a} + f \text{rot } \vec{a}, \quad (\text{rot } \vec{r} \equiv 0). \quad (13.15)$$

Momentul rezultat al forțelor de presiune exercitate pe o suprafață închisă dintr-un fluid este egal în modul și de sens opus cu momentul rezultat al forțelor de greutate ale volumului de fluid cuprins de acea suprafață.

Greutatea aparentă a unui corp cufundat într-un fluid va fi (p_f — densitatea fluidului, p_s — densitatea solidului):

$$G_a = mg - p_f V g = mg(1 - p_f/p_s). \quad (13.16)$$

Dacă $p_f < p_s$, corpul se scufundă, dacă $p_f > p_s$, corpul se ridică la suprafață (plutește).

13.1.5. FLUIDELE ÎN SR ACCELERATE

Dacă fluidul se află în repaus relativ într-un SR accelerat, atunci este comod să-l studiem în SR *propriu*: considerațiile din hidrostatică se aplică întotdeauna introducînd bineînțeles *forțele de transport* (forțele Coriolis sînt nule dacă fluidul este în repaus în acel sistem).

De exemplu, suprafața liberă a fluidului va fi perpendiculară pe rezultanta forțelor masice: gravitaționale și de transport; la fel distribuția straturilor de fluid de densități diferite (separatorul centrifugal); forța arhimedică se schimbă corespunzător etc. Totul se petrece ca și cum s-ar adăuga un cîmp suplimentar de forțe gravitaționale egale cu forțele de transport.

Mai general, dacă fluidul curge în SR neinercial considerat, atunci mai trebuie adăugate și forțele Coriolis.

De exemplu, dacă într-un vas închis arde o luminare (ferită de curenți de aer) și punem vasul la mîrginea unui disc orizontal în rotație (la mașina centrifugă), atunci flacăra se înclină spre *centrul* discului (spre axa de rotație) și se încovoie spre dreapta (dacă privim de sus și rotația se face în sens trigonometric) (fig. 13.4).

În adevăr, flacăra este formată dintr-un *curent de gaze fierbinți* de densitate mai mică decît aerul, de aceea în cîmpul forțelor de transport centrifuge flacăra se înclină radial către centru, iar forțele Coriolis (care acționează numai asupra gazelor fierbinți care se mișcă) o încovoie spre dreapta. Analog, dacă lăsăm să cadă *liber* un felinar (ferit de curenți de aer), atunci în timpul căderii flacăra se stinge, fiindcă lipsește forța ascensională statică, care să îndepărteze gazele arse ale flăcării (deci va fi împiedicat accesul oxigenului).

13.2. ECUAȚIA DE CONTINUITATE

Fluidul este caracterizat prin distribuția vitezelor (cîmp vectorial) și a presiunilor (cîmp scalar):

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t), \quad p = p(\vec{r}, t). \quad (13.17)$$

Dacă viteza și presiunea *nu depind de timp*, curgerea este staționară sau *în regim permanent*.

a) *Linii de curent* sînt traiectoriile particulelor de fluid în regim staționar sau în general sînt acele linii de-a lungul cărora *vectorul vitezei este tangent la linie*.

Dacă prin toate punctele unui contur închis ducem liniile de curent, obținem un tub de curent, a cărui suprafață laterală este formată deci din linii de curent. Particulele de fluid aflate într-un tub de curent nu pot ieși din el în regimul de curgere staționar.

b) Fluxul de fluid. Cantitatea de fluid dm care trece în timpul dt printr-un element de suprafață dS este evident (fig. 13.5):

$$dm = \rho dS_1 v dt = \rho dS \vec{v} dt = \vec{\mu} dS dt, \quad \vec{\mu} = \rho \vec{v}, \quad (13.18)$$

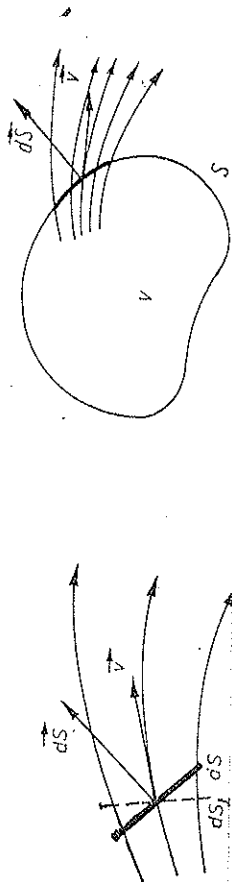


Fig. 13.5

unde $\vec{\mu}$ este densitatea curentului (fluxului) de fluid, egală numeric cu masa de fluid care trece în unitatea de timp prin unitatea de suprafață așezată perpendicular pe direcția curentului:

$$\mu = \frac{dm}{dS_1 dt} = \rho v, \quad \vec{\mu} = \rho \vec{v}. \quad (13.18')$$

c) Ecuația de continuitate. Să delimităm în interiorul fluidului un volum arbitrar V de fluid, mărginit de suprafața închisă S (fig. 13.6). Masa de fluid conținută în volumul V este

$$\int_V dm = \int_V \rho(\vec{r}, t) dV. \quad (13.19)$$

Printr-un element de suprafață dS iese cantitatea de fluid (13.18), de unde prin toată suprafața iese cantitatea de fluid:

$$dt \oint_S \vec{\mu} dS = dt \oint_S \rho \vec{v} dS, \quad (13.20)$$

ceea ce duce la scăderea corespunzătoare a masei (13.19) conținute în volumul V (integrala 13.19 depinde de timpul t ca de un parametru):

$$- \frac{d}{dt} \int_V \rho(\vec{r}, t) dV = - \oint \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \oint \rho \vec{v} dS dt,$$

de unde

$$- \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \oint_S \rho \vec{v} dS; \quad (13.21)$$

scăderea masei de fluid conținute în interiorul unei suprafețe închise S , în unitatea de timp, este egală cu fluxul de masă care iese prin suprafața S (expresia legii de conservare a masei).

Aplicând teorema lui Gauss (\vec{a} — vector arbitrar cu derivate continue):

$$\oint_S \vec{a} dS = \int_V \operatorname{div} \vec{a} dV, \quad \operatorname{div} \vec{a} = \frac{d}{dx} a_x + \frac{d}{dy} a_y + \frac{d}{dz} a_z, \quad (13.22)$$

membrului drept din (13.21), obținem

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} \right) dV = 0. \quad (13.23)$$

Cum volumul V este arbitrar, integrandul trebuie să fie nul:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0. \quad (13.24)$$

Aceasta este *ecuația de continuitate* (sau ecuația continuității) — expresie a legii de conservare a masei fluidului.

O ecuație absolut identică este valabilă pentru densitatea de sarcină electrică ρ (expresie a legii de conservare a sarcinii electrice).

d) În cazul regimului staționar (permanent), densitatea fluidului nu depinde de timp, $\partial \rho / \partial t = 0$, și (13.24) devine:

$$\operatorname{div} \rho \vec{v} = 0 \quad \text{sau} \quad \int_V \operatorname{div} \rho \vec{v} dV = \oint_S \rho \vec{v} dS = 0. \quad (13.25)$$

Să aplicăm ultima ecuație unui tub de curent între două secțiuni $S_{1,2}$ (fig. 13.7). Pe suprafața laterală: $\vec{v} dS = 0$, de aceea:

$$\oint \rho \vec{v} dS = \int_{S_1} \rho \vec{v} dS - \int_{S_2} \rho \vec{v} dS = 0,$$

unde în ambele integrale din S_1 membrul drept, dS se ia în sensul curgerii. Prin urmare,

$$Q_m = \int_{S_1} \rho \vec{v} dS = \int_{S_2} \rho \vec{v} dS = \text{const}, \quad (13.26)$$

adică, în regim staționar debitul de masă Q_m este același prin fiecare secțiune a unui tub de curent.

Pentru un tub subțire, astfel încât densitatea și viteza fluidului să fie practic constante pe secțiunea tubului, obținem:

$$Q_m = \rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2 = \rho v S = \text{const}. \quad (13.27)$$

e) În cazul curgerii unui fluid incompresibil, $\rho = \text{const}$, deci $\partial \rho / \partial t = 0$ și $\partial \rho / \partial x = 0$ etc., și (13.24) devine:

$$\text{div } \vec{v} = 0 \text{ sau } \int_V \text{div } \vec{v} dV = \oint_S \vec{v} d\vec{S} = 0. \quad (13.28)$$

Aplicând unui tub de curent, ca mai sus, obținem:

$$Q_v = \int_{S_1} \vec{v} d\vec{S} = \int_{S_2} \vec{v} d\vec{S} = \text{const}, \quad (13.29)$$

unde în ambele integrale $d\vec{S}$ se ia în sensul curgerii, deci

în cazul curgerii fluidului incompresibil, atât debitul de volum cât și debitul de masă sînt constante de-a lungul unui tub de curent.

Luînd vitezele mediate pe secțiunea tubului, ecuația (13.29) devine:

$$Q_v = \bar{v} S = \text{const și } Q_m = \bar{\rho} \bar{v} S = \text{const}. \quad (13.30)$$

Acolo unde tubul se îngustează, viteza fluidului crește. Rezultă atunci că acolo unde liniile de curent se îndesesc, viteza fluidului crește.

13.3. ECUAȚIA LUI BERNOULLI

Se numește fluid ideal un fluid incompresibil și lipsit de viscozitate.

Cu o precizie destul de bună, lichidele reale pot fi considerate incompresibile. Deși gazele sînt ușor compresibile, totuși compresibilitatea lor se manifestă abia la curgeri cu viteze apropiate de viteza sunetului. Experiența arată că un mare număr de lichide și chiar gaze, dacă vitezele acestora sînt mult mai mici decît viteza sunetului și gradientii vitezelor sînt mici, corespund satisfăcător fluidului ideal. Vom studia în acest paragraf curgerea unui fluid ideal.

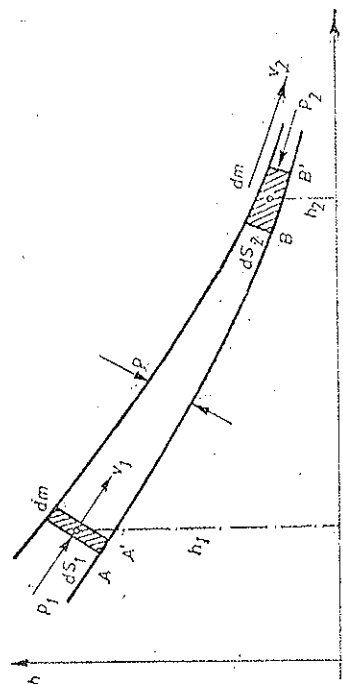


Fig. 13.8

a) Ecuația lui Bernoulli. Să considerăm fluidul ideal și un tub de curent infinit de subțire, delimitat la capete de două secțiuni dS_1 , dS_2 și să aplicăm cantității de fluid astfel delimitate teorema variației energiei mecanice (fig. 13.8). În timpul dt sistemul se deplasează de-a lungul tubului din poziția

AB în poziția $A'B'$. Totul se petrece ca și cum din porțiunea AA' ar dispărea masa $dm = \rho dS_1 v_1 dt = \rho dV$ cu energia cinetică $dm \cdot v_1^2 / 2$ și cu energia potențială $dm \cdot g h_1$, iar în porțiunea BB' ar apărea o masă egală (datorită incompresibilității fluidului ideal) $dm = \rho dS_2 v_2 dt = \rho dV$ cu energia cinetică $dm \cdot v_2^2 / 2$ și cu energia potențială $dm \cdot g h_2$.

Variația energiei mecanice (cinetice și potențiale) a sistemului este deci

$$dE = \frac{1}{2} dm (v_2^2 - v_1^2) + dm g (h_2 - h_1) \quad (13.31)$$

și trebuie să fie egală cu lucrul mecanic al forțelor de presiune exercitate asupra sistemului considerat:

$$\begin{aligned} dW &= F_1 dS_1 - F_2 dS_2 = p_1 dS_1 v_1 dt - p_2 dS_2 v_2 dt = \\ &= p_1 dV - p_2 dV, \quad dV = dm / \rho; \end{aligned} \quad (13.32)$$

forțele de presiune laterale nu efectuează lucru mecanic și nu avem forțe tangențiale de frecare, fluidul fiind presupus ideal (fără viscozitate):

$$dE = dW \rightarrow p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2$$

sau

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h = \text{const}. \quad (13.33)$$

Aceasta este ecuația lui Daniel Bernoulli (1700—1782). Constanta diferă în general de la o linie de curent la alta (este aceeași la curgerea fără vîrtejuri).

Presiunea p este presiunea statică; $p_a = \frac{\rho}{2} v^2$ se numește presiune dinamică, ea se datorește energiei cinetice a fluidului, fiind egală cu energia cinetică a unității de volum, iar $\rho g h$ este presiunea de „poziție” (sau „potențială”), datorită energiei potențiale, fiind egală cu energia potențială a unității de volum.

Legea lui Bernoulli. Presiunea totală într-un fluid perfect este constantă de-a lungul unei linii de curent.

Presiunea statică se exercită asupra unui element de suprafață așezat paralel cu linii de curent, de exemplu pe pereții tubului (de aceea este uneori numită presiunea pe pereți), sau exercitată asupra unui element de suprafață orientat arbitrar dar mișcat solidar cu fluidul. Presiunea statică se măsoară cu sondele de presiune.

Presiunea totală se exercită asupra unui element de suprafață așezat perpendicular pe liniile de curent și se măsoară cu tubul Pitot avînd deschiderea așezată perpendicular pe liniile de curent. Presiunea dinamică se măsoară cu tubul Prandtl (fig. 13.9).

Pentru conducte orizontale ecuația lui Bernoulli devine

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 = p + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{const}. \quad (13.34)$$

Pentru linia de curent care intră în tubul Pitot $v_2 = 0$ și deci presiunea indicată de el $p_2 = p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 =$ presiunea totală.

b) **Paradoxul hidrodinamic.** Intrând într-o porțiune îngustă a unui tub de curent viteza particulelor crește (debitul fiind constant), adică ele se mișcă accelerat, de unde rezultă că presiunea în fluid în porțiunea largă a tubului trebuie să fie mai mare decât în porțiunea îngustă.

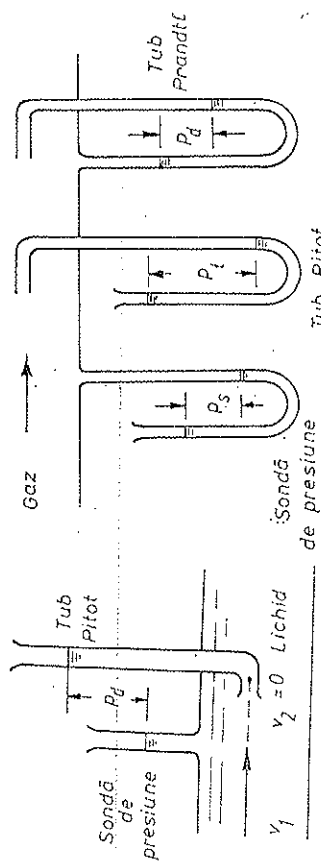


Fig. 13.9

În adevăr, deoarece în porțiunile înguste ale tubului viteza fluidului crește (conform ecuației de continuitate), crește și presiunea dinamică, de aceea trebuie să scadă presiunea statică, adică presiunea pe pereți, pentru ca suma lor să rămână constantă, conform ecuației lui Bernoulli (*paradoxul hidrodinamic*).

Presiunea la gâtuitură poate scădea chiar sub presiunea atmosferică, astfel încât apare *fenomenul de aspirație* pe care se bazează unele aplicații practice, precum pulverizatorul, trompa de apă, lampa Bunsen etc. (fig. 13.10).

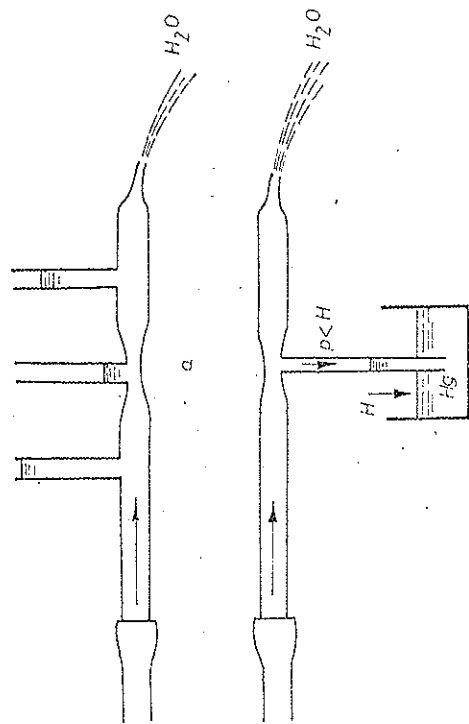


Fig. 13.10

Aplicații. a) *Formula lui Torricelli.* În cazul scurgerii unui lichid printr-un orificiu S într-un vas, sub acțiunea greutateii, legea lui Bernoulli dă pentru tubul de curent delimitat de secțiunile S' și S (fig. 13.11):

$$H + \frac{1}{2} \rho v'^2 + \rho g h' = H + \frac{1}{2} \rho v^2; \quad S'v' = Sv,$$

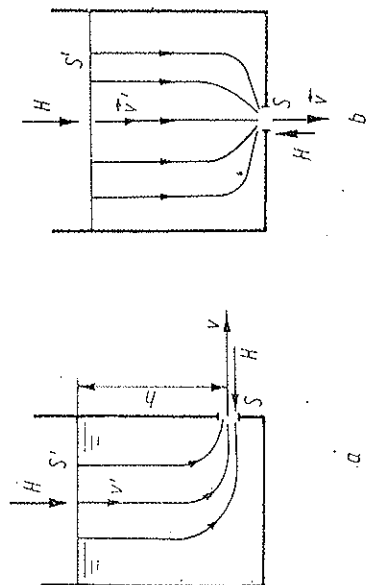


Fig. 13.11

de unde

$$v = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 - S'^2/S^2}} \quad (13.35)$$

Dacă $S' \gg S$, obținem *formula lui Torricelli* (seamănă cu formula lui Galilei de la căderea liberă):

$$v = \sqrt{2gh}; \quad (13.35')$$

viteza de scurgere coincide cu viteza particulelor în căderea liberă.

Se vede și din fig. 13.11 că acolo unde limitele de curent se îndesesc, viteza fluidului crește.

b) *Reacțiunea fluidului asupra conductei curbate.* Un fluid care curge printr-o conductă curbată exercită asupra acesteia o forță de reacțiune F' care poate fi calculată din variația impulsului, raportată la unitatea de timp. În unitatea de timp trece printr-o secțiune a conductei masa de fluid $Q_m = \rho S_1 v_1 = \rho S_2 v_2$ (debitul masic), a cărei variație de impuls este egală cu forța exercitată de conductă asupra fluidului (fig. 13.12):

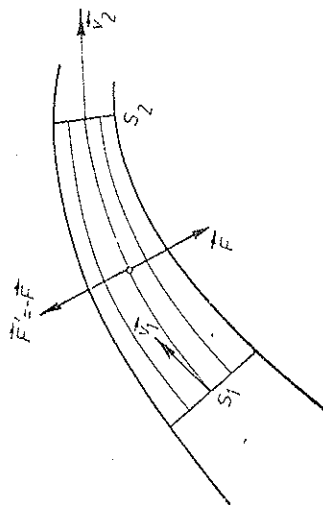


Fig. 13.12

$$\vec{F} = Q_m \Delta \vec{v} = Q_m (\vec{v}_2 - \vec{v}_1), \quad (13.36)$$

de unde forța de reacțiune \vec{F}' exercită de fluid asupra conductei:

$$\vec{F}' = -\vec{F} = Q_m(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \rho S v(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \quad (13.37)$$

Exemplu: Un tub de cauciuc, legat cu un capăt la robinetul de apă și cu celălalt capăt încolăcit pe masă, se va îndrepta prin curgerea apei.

13.4. VISCOZITATEA

La viteze nu prea mari curgerea fluidelor este *laminară* (în straturi paralele), adică liniile de curent sînt bine determinate și nu se intersectează nicăieri între ele, fiecare particulă de fluid rămîne mereu în interiorul unui același tub de curent. La viteze mari mișcarea devine *turbulentă*, neregulată, porțiunile de fluid se amestecă și se formează *vîrtejuri* (există și curgerea fluidului ideal cu vîrtejuri).

a) Dacă straturile de fluid alunecă unele față de altele, între ele apar *forțe de frecare internă sau de viscozitate*. Stratul cu viteză mai mică va fi în contact, și invers, stratul cu viteză mai mare va accelera stratul cu viteză mai mică peste care el alunecă.

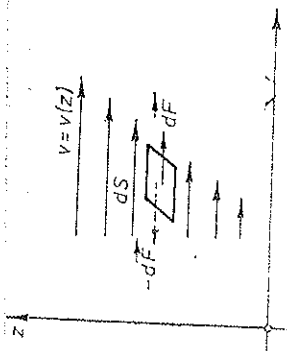


Fig. 13.13

Apariția acestor forțe, situate în planele de alunecare, se explică prin variația de impuls a straturilor datorită trecerii moleculelor dintr-un strat în altul. Vom presupune că direcția de curgere a fluidului este aceeași peste tot și că viteza de curgere variază ca modul numai în direcție perpendiculară (transversală) pe direcția de curgere (fig. 13.13).

Experiența arată că *forța de frecare internă* care apare în planul de alunecare pe unitatea de suprafață este proporțională cu gradientul vitezei (legea lui Newton):

$$\tau = \frac{dF}{dS} = \eta \frac{dv}{dz}, \quad dF = \eta \frac{dv}{dz} dS, \quad (13.38)$$

unde η este *coeficientul de viscozitate* (dinamică), dependent de natura fluidului (și de temperatură).

b) *Dimensiunea coeficientului de viscozitate* este

$$[\eta] = \frac{L^{-1}MT^{-2}}{LT^{-1}L^{-1}} = L^{-1}MT^{-1} = \text{kg/m} \cdot \text{s} = \text{N} \cdot \text{s/m}^2 \text{ în SI.} \quad (13.39)$$

Unitatea CGS este *poise* P (după numele lui Poiseuille):

$$1 P = 1 \text{ g/cm} \cdot \text{s} = 0,1 \text{ kg/m} \cdot \text{s}, \quad (13.40)$$

deci *unitatea SI este egală cu deca-poise* (daP).

La lichide η este de ordinul a 10^{-3} daP, iar la gaze η este cu două ordine mai mic: $\eta \sim 10^{-5}$ daP.

Viscozități în 10^{-3} daP

	0°C	20°C	100°C
apă	1,786	1,002	0,283
mercur	1,68	1,53	1,23
aer	$1,7 \cdot 10^{-2}$	$1,8 \cdot 10^{-2}$	$2,2 \cdot 10^{-2}$

Viscozitatea η împărțită prin densitatea ρ a fluidului se numește *viscozitatea cinematică*:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}, \quad [\nu] = \frac{L^{-1}MT^{-1}}{ML^{-3}} = L^2T^{-1} = \text{m}^2/\text{s} \text{ în SI.} \quad (13.41)$$

Unitatea CGS este *stokes* (St):

$$1 \text{ St} = 1 \text{ cm}^2/\text{s} = 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}. \quad (13.42)$$

La lichide $\nu \sim 10^{-6}$ m²/s, la gaze $\nu \sim 10^{-5}$ m²/s (mai mare decât la lichide).

Viscozitatea η la lichide scade sensibil cu creșterea temperaturii, în timp ce la gaze crește ca \sqrt{T} .

c) Existența frecării interne (a viscozității) se arată experimental ușor suspendînd printr-un fir un disc sau un cilindru sub care se rotește un alt disc sau cilindru (fig. 13.14).

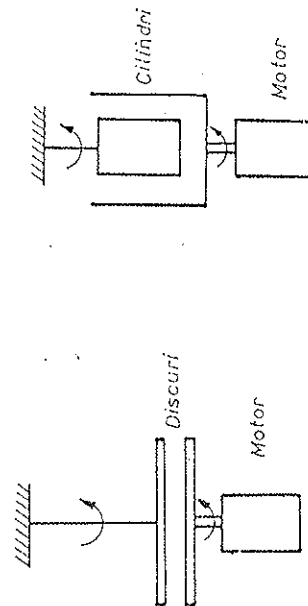


Fig. 13.14

Stratul de fluid imediat adiacent corpului rotit aderă de acesta și este antrenat de el. Celelalte straturi sînt antrenate cu viteze din ce în ce mai mici pînă la ultimul strat alipit celui al disc sau cilindru asupra căruia se va exercita astfel o forță de frecare care îl va roti.

13.5. FORMULA LUI POISEUILLE

Să studiem curgerea laminară staționară a unui fluid viscos printr-un tub. Curgerea laminară are loc la viteze nu prea mari sau la diametre nu prea mari.

Să delimităm un tub de curent de rază r (fig. 13.15).

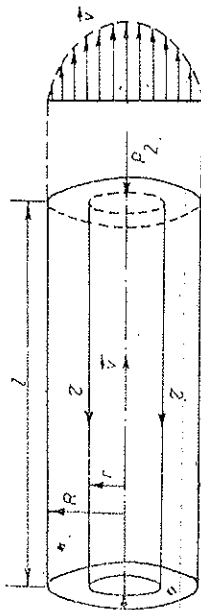


Fig. 13.15

Asupra fluidului din acest tub acționează forțele de presiune de la extremități cu rezultanta: $p_1 \pi r^2 - p_2 \pi r^2$ și forța de frecare internă pe suprafața laterală, exercitată de restul fluidului, datorită viscozității: $2\pi r l$. Curgerea fiind staționară (cu viteză constantă), forțele își fac echilibrul:

$$(p_1 - p_2) \pi r^2 = 2\pi r l \tau$$

sau ținând seama de (13.38):

$$(p_1 - p_2) r = -2l\eta \frac{dv}{dr}, \quad (13.43)$$

unde semnul minus se datorește semnului negativ al gradientului vitezei: $dv/dr < 0$; viteza pe axa tubului este maximă și scade spre pereții tubului, fiind nulă la perete, în stratul adiacent.

Prin integrare obținem:

$$dv = -\frac{p_1 - p_2}{2l\eta} r dr, \quad v = -\frac{p_1 - p_2}{4l\eta} r^2 + C,$$

unde constanta de integrare C se determină din condiția că la perete, pentru $r = R$, viteza este nulă:

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4l\eta} (R^2 - r^2) = v_m (1 - r^2/R^2),$$

$$v_m = \frac{p_1 - p_2}{4l\eta} R^2, \quad v/v_m = 1 - (r/R)^2. \quad (13.44)$$

Distribuția vitezelor este deci parabolică (fig. 13.15).

Să calculăm debitul volumic:

$$Q_v = \int v dS = \int_0^R v 2\pi r dr = \frac{2\pi(p_1 - p_2)}{4l\eta} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr,$$

$$Q_v = \frac{\pi(p_1 - p_2)}{8l\eta} R^4 = S \bar{v}, \quad \text{unde } \bar{v} = \frac{p_1 - p_2}{8l\eta} R^2. \quad (13.45)$$

Aceasta este formula lui Poiseuille (1841).

Debitul este proporțional cu căderea de presiune pe unitatea de lungime a tubului și cu puterea a 4-a a razei tubului.

Această formulă poate fi folosită pentru determinarea viscozității fluidelor (de exemplu, în viscosimetrul lui Ostwald).

Legea lui Poiseuille explică unele aspecte ale fiziologiei circulației sanguine. În adevăr, rețeaua capilară a omului însumează 10^3 km! După nevoile organismului debitul singelui este reglat ușor prin contracția sau dilatarea vaselor sanguine ($\sim R^4$) (sîngele necesar este luat din „depoul de sînge”, în primul rînd din splină și ficat).

13.6. LEGEA LUI STOKES

a) Atunci cînd un corp se mișcă într-un fluid, la suprafața sa aderă un strat foarte subțire de fluid, antrenat de corp. În regim laminar, deci la viteze nu prea mari, în vecinătatea corpului există un strat relativ subțire, numit *strat limită*, în care viteza scade pînă la zero și în care se manifestă forțele de frecare datorite viscozității.

Putem evalua grosimea d a stratului limită astfel. Notăm lungimea și lățimea stratului limită cu h și b . Atunci forța de frecare internă după legea lui Newton este

$$F \sim \eta \frac{v}{d} hb. \quad (13.46)$$

Pe de altă parte, forța de frecare internă poate fi găsită din variația de impuls a fluidului (de la stratul cu viteză zero pînă la cel cu viteza v) pe unitatea de timp:

$$F = Q_m v = \rho db v \cdot v = \rho db v^2. \quad (13.47)$$

Din aceste două expresii rezultă

$$d \cong \sqrt{\frac{hb\eta}{\rho v}}. \quad (13.48)$$

Dacă considerăm raportul hb/d din (13.46) ca o lungime caracteristică l a corpului, atunci forța de frecare (13.46) devine

$$F = \text{const.} \cdot \eta v \quad (\text{legea lui Stokes}). \quad (13.49)$$

Legea lui Stokes. Forța de frecare F înfrîmpată de corp (în regim laminar de curgere) este proporțională cu viscozitatea fluidului η , cu dimensiunea liniară caracteristică l a corpului și cu viteza sa v .

În cazul sferei se obține formula lui Stokes:

$$F = 6\pi \eta r v, \quad (13.50)$$

unde r este raza sferei.

b) Cu ajutorul formulei lui Stokes se poate calcula viteza limită pe care o atinge un corp sferic în cădere liberă într-un fluid. La început viteza fiind mică, forța de frecare Stokes este mică și corpul cade accelerat sub acțiunea greutății aparente. Pe măsură ce crește viteza, crește și forța de frecare Stokes (13.50) pînă cînd devine egală cu greutatea aparentă și sfera coboară atunci uniform cu viteza limită (fig. 13.16):

$$6\pi \eta r v = mg(1 - \rho_f/\rho_s) = (\rho_s - \rho_f) \frac{4\pi r^3}{3} g,$$

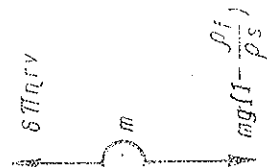


Fig. 13.16

de unde viteza limită

$$v = \frac{2}{9\eta} (\rho_s - \rho_f) g r^2 \quad (13.51)$$

Viteza limită este proporțională cu pătratul razei. Ea se atinge practic foarte repede.

Pentru particule foarte mici, viteza va fi foarte mică (ceafă, nori, praf fin). Formula (13.51) a fost folosită de Millikan pentru determinarea sarcinii electronului.

13.7. EFECTUL MAGNUS

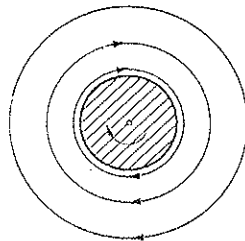
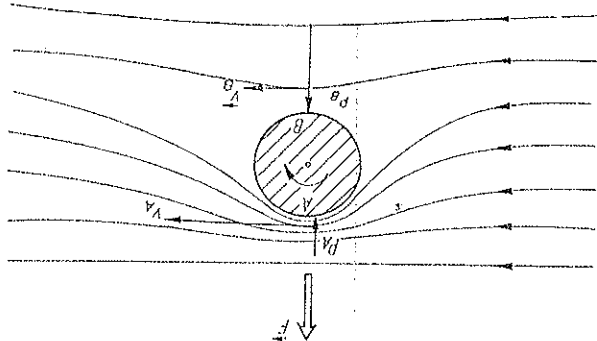
Fie un cilindru în rotație așezat într-un curent de fluid, în regim laminar, perpendicular pe axa cilindrului (fig. 13.17).

Datorită forțelor de frecare (viscozității) cilindrul antrenează straturile de fluid din vecinătatea sa, în sensul mișcării sale de rotație. În punctul A viteza fluidului va fi mai mare decât în punctul B, unde cilindrul se rotește în sens invers curgerii fluidului. Conform legii lui Bernoulli, presiunea statică laterală asupra cilindrului va fi mai mare în B decât în A, astfel încât apare o forță rezultantă transversală spre partea unde viteza fluidului este mai mare. Acesta este efectul Magnus.

Ca regulă practică corpul este împins transversal din regiunea cu liniile de curent rare spre regiunea cu liniile de curent dese.

Efectul poate fi ilustrat punând în rotație un cilindru de carton și aruncându-l orizontal. După sensul rotației, traiectoria cilindrului va curba lin sau brusc spre Pământ (fig. 13.18). Se poate folosi și un plan înclinat.

O altă experiență se poate face cu un mosor din carton ușor peste care este înfășurată o bandă subțire și ușoară de pânză, ca în fig. 13.19. Trăgând brusc orizontal banda de pânză (fixată de un bețișor ținut orizontal), mosorul se va roti foarte repede și va luneca. Părăsind masa, în loc să cadă după parabolă, mosorul va zbura în sus descriind o buclă.



∞

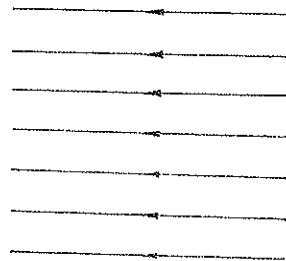


Fig. 13.17

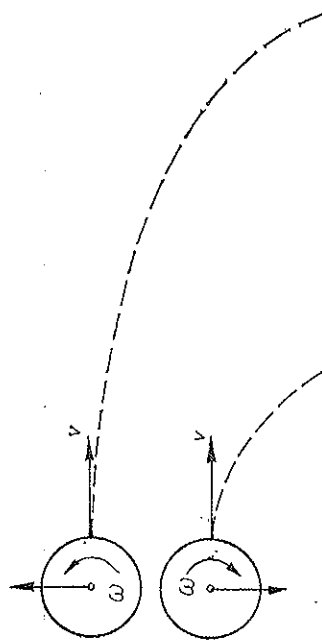


Fig. 13.18

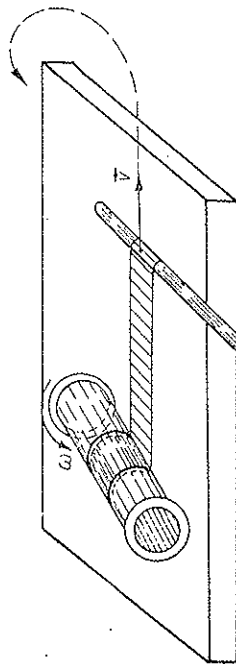


Fig. 13.19

13.8. CURGerea TURBULENTĂ

13.8.1. FORMULA LUI NEWTON

Dacă viteza de curgere depășește o valoare critică, regimul laminar devine instabil și trece în regim turbulent. Se formează vârtejuri, a căror origine este legată de forțele de frecare (viscozitate). Liniile de curent dispar; întreaga masă de fluid se mișcă dezordonat. Viteza nu mai este o funcție continuă de punct. Curgerea devine nestaționară. Viteza și presiunea variază în fiecare punct, fluctuează în jurul unor valori medii. Forța de rezistență exercitată asupra obiectelor crește și devine proporțională cu densitatea fluidului și cu pătratul vitezei.

În adevăr, la viteze mici, în regim laminar, predomină forțele de frecare care depind de viscozitatea η , de viteza relativă v a fluidului față de corp și de dimensiunile liniare l ale corpului. Din considerații dimensionale rezultă ușor legea lui Stokes:

$$F = \text{const.} \cdot \eta^2 \beta^3 v^2, \quad LMT^{-2} = (L^{-1}MT^{-1})^2 L^3(LT^{-1})^{-2},$$

de unde $\alpha = 1$, $\gamma = 1$, $\beta = 1$,

$$F = \text{const.} \cdot \eta v \quad (\text{legea Stokes}). \quad (13.52)$$

La viteze mari, în regim turbulent, predomină efectele inerțiale, datorite energiei cinetice sau presiunii dinamice. Vîrtejurile consumă energie cinetică de rotație în dauna energiei cinetice de translație a lichidului. Formarea vîrtejurilor în urma corpului (fig. 13.20) duce la o creștere a forței de rezistență la curgere față de regimul laminar. Vîrtejurile se amortizează treptat, energia lor cinetică transformîndu-se în căldură (în energia internă a fluidului). Viscositatea se manifestă doar într-un strat limitat foarte subțire.

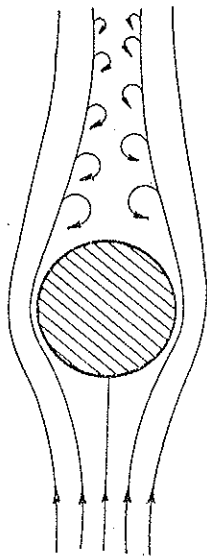


Fig. 13.20

tență la curgere față de regimul laminar. Vîrtejurile se amortizează treptat, energia lor cinetică transformîndu-se în căldură (în energia internă a fluidului). Viscositatea se manifestă doar într-un strat limitat foarte subțire.

Din considerații dimensionale rezultă ușor formula lui Newton:

$$F = \text{const} \cdot \rho v^2 r^2, \quad LMT^{-2} = L^2(LT^{-1})^2 (ML^{-3})^2, \quad (13.53)$$

de unde $\gamma = 1$, $\beta = 2$, $\alpha = 2$;

$$F = \frac{1}{2} C S \rho v^2 \quad (\text{formula lui Newton}), \quad (13.54)$$

unde C este o constantă adimensională, sensibilă la forma corpului (fig. 13.21), S — aria secțiunii transversale.

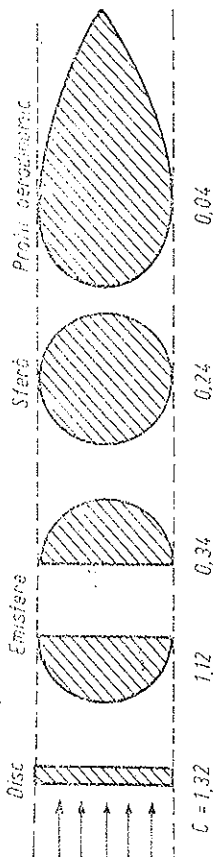


Fig. 13.21

Forța de rezistență F este proporțională cu aria transversală S opusă fluidului, cu densitatea ρ a fluidului și cu pătratul vitezei v (cu presiunea dinamică $\rho v^2/2$).

Trebuie observat că la orice viteze (la orice regim, laminar sau turbulent), în forța de rezistență contribuie ambele efecte, al viscozității și al energiei cinetice, numai că la viteze mici predomină primul efect (energia cinetică sau presiunea dinamică este neglijabilă față de forțele de frecare internă datorite viscozității), iar la viteze mari predomină al doilea efect.

Viteza limită de cădere liberă a unui corp într-un fluid (aer), în regim turbulent (de exemplu, parașută), va fi

$$\frac{1}{2} C S \rho v^2 = mg(1 - \rho_f/\rho_s), \quad v = \sqrt{\frac{2Vg}{CS} (\rho_s/\rho_f - 1)} \quad (13.54)$$

și în cazul unei sfere ($C = 0,24$) (R — raza sferei):

$$v = \frac{1}{0,6} \sqrt{Rg(\rho_s/\rho_f - 1)} = 1,67 \sqrt{Rg(\rho_s/\rho_f - 1)}. \quad (13.55)$$

13.8.2. NUMĂRUL LUI REYNOLDS

Trecerea de la regim laminar la cel turbulent trebuie să aibă loc la viteze pentru care cele două forțe (13.52), (13.53) devin comparabile între ele:

$$C_1 \eta v \sim C_2 \rho v^2 r, \quad \frac{\rho v}{\eta} \sim \frac{C_1}{C_2}. \quad (13.56)$$

Raportul adimensional

$$Re = \frac{\rho v}{\eta} = \frac{lv}{\nu} \quad (13.57)$$

se numește *numărul (cifra) lui O. Reynolds* (1883).

Experiența arată că trecerea de la regimul laminar la cel turbulent are loc pentru anumite valori ale numărului Reynolds, și anume, conform condiției (13.56) pentru $Re \sim C_1/C_2$, dar această valoare critică a numărului Reynolds C_1/C_2 trebuie determinată experimental, întrucât nu cunoaștem constantele C_1 , C_2 din cele două legi ale forței de rezistență, constante care sînt sensibile la forma corpului.

Astfel, pentru conducte tubulare cu pereți netezi această valoare critică a numărului Re este (D — diametrul conductei):

$$Re = \frac{Dv}{\nu} \approx 2300. \quad (13.58)$$

Deci regimul turbulent apare la viteze suficient de mari sau la diametre mari (pentru un fluid ideal $Re \rightarrow \infty$).

În general forța de rezistență se poate scrie sub forma:

$$F = f(Re) \cdot \rho v^2 S, \quad (13.59)$$

unde $f(Re)$ este o funcție adimensională de numărul lui Reynolds. De exemplu, în cazul legii Stokes (regim laminar) pentru sferă:

$$f(Re) = \frac{12}{Re}, \quad (13.60)$$

și condiția de valabilitate a legii Stokes este: $Re \ll 1$.

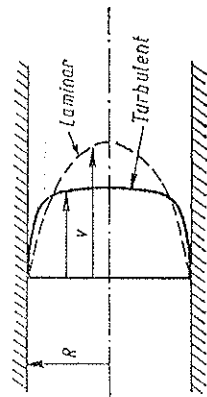


Fig. 13.22

$$v/v_m = 1 - (\gamma/R)^{1/7} = 1 - \sqrt[7]{\gamma/R}. \quad (13.61)$$

13.8.3. TEORIA SIMILITUDINII

Mișcările care diferă prin parametrii ρ , η , v , l , dar au același număr Reynolds, se numesc *asemenie*. Întregul tablou al mișcării fluidului diferă atunci doar prin *scara* caracteristicilor sale. Astfel, comportarea avionului poate fi studiată pe modele în tunele aerodinamice (în aviație, numărul Reynolds ajunge la $\sim 10^6$).

Există și alte numere adimensionale folosite în teoria similitudinii. De exemplu, la plutirea vaselor, alături de forțele de rezistență proporționale cu ρv^2 , joacă rol forța arhimedică $\rho \beta g$. Două plutiri vor fi asemenea dacă raportul acestor forțe

$$Fr = \frac{v^2}{lg}, \quad (13.62)$$

numit *numărul lui Froude* (1870), este același.

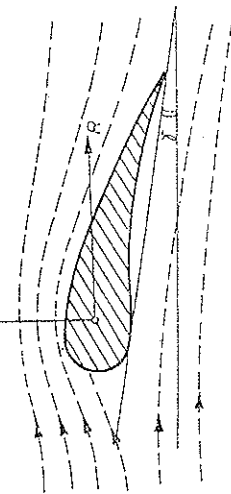
La viteze de ordinul vitezei sunetului, rezistența este proporțională aproximativ cu *cubul* vitezei pentru ca la viteze supersonice să devină din nou proporțională cu pătratul vitezei.

Aripi de avion

În cazul *aripii de avion* (fig. 13.23) apare o forță rezultantă a cărei componentă orizontală R , numită *rezistență frontală*, trebuie învinsă prin acțiunea elicei, și o componentă verticală, și o mișcă *portanșă* (sau forță portanță; ea este denumită și forță ascensională *dinamică* spre deosebire de cea statică din legea lui Arhimede), care învinge greutatea avionului (γ este unghiul de atac).

Și aici se aplică regula practică: *corpul este împins transversal din regiunea cu linii de curent rare spre regiunea cu linii de curent dese*.

Fig. 13.23



PROBLEME

1. Un vas cubic este umplut complet cu un lichid, greutatea lichidului fiind G . Să se afle forța de presiune rezultantă exercitată de lichid asupra unui perete lateral al vasului. Unde se află punctul de aplicație ai acestei forțe?

$$F = G/2, \quad h = l/3.$$

R.

2. Un corp plutește pe suprafața mercurului (de densitate ρ) astfel încât este cufundată o fracțiune k din volumul său. Ce fracțiune k' din volumul corpului va fi cufundată în mercur, dacă se toarnă deasupra apă până se acoperă corpul?

$$k' = \frac{\rho k - \rho_0}{\rho - \rho_0}.$$

3. Pe suprafața unui lichid de densitate ρ_0 plutește o cană cu pereți foarte subțiri, de secțiune S , umplută parțial cu același lichid. În cană se introduce un corp de greutate G , care plutește. Cu cât variază nivelul lichidului în exteriorul și în interiorul căzii, față de cană?

$$\Delta H = \Delta h = G/\rho_0 S.$$

4. Dacă o barcă (sau vapor) care plutește pe un lac se scufundă, ce se întâmplă cu nivelul apei din lac?

R. Scade.

5. Într-un vas cu apă plutește o bucată de gheață care conține în interior o bucată de plumb. Cum se schimbă nivelul apei din vas în timpul topirii gheții?

R. Nu se schimbă.

6. Un disc de gheață de secțiune S și grosime h plutește pe apă. Ce lucru mecanic trebuie efectuat pentru a cufunda complet discul în apă?

$$W = \frac{gS}{2\rho_0} h^2 (\rho_0 - \rho)^2.$$

7. O bilă urcă cu viteză constantă într-un lichid a cărui densitate este de n ori mai mare decât a bilei. De câte ori forța de rezistență este mai mare decât greutatea bilei?

$$F_r/G = \rho/\rho_0 - 1 = n - 1.$$

8. O tijă subțire omogenă de greutate G are un capăt fixat într-o articulație de peretele interior al unui vas, celălalt capăt fiind cufundat în lichidul din vas de densitate ρ_0 . Tijă se poate roti liber fără frecare în articulație. Să se afle densitatea ρ a tijei dacă la echilibrul lungimea rămasă afară reprezintă o fracțiune k din lungimea tijei. Care este forța de reacțiune din articulație?

$$\rho = \rho_0(1 - k^2), \quad \vec{F} = -\vec{G} \frac{k}{1+k}.$$

9. Într-un vas închis, umplut cu lichid, câteva corpuri plutesc și câteva corpuri stau pe fundul vasului. Cum se vor deplasa corpurile dacă punem vasul într-o mașină centrifugă?

R. Corpurile care plutesc se deplasează spre centru, iar cele de pe fundul vasului spre periferie.

10. Un vas cilindric de rază R conține un lichid de densitate ρ și se rotește uniform cu viteza unghiulară ω în jurul axei sale verticale. Să se afle ecuația suprafeței libere a lichidului și presiunea în lichid (fig. 13.24).

$$R. z = h + \frac{\omega^2}{2g} (x^2 + y^2) = h + \frac{\omega^2}{2g} r^2 - \text{paraboloid de revoluție cu axa verticală; } p = \rho g(h - z) + \frac{1}{2} \rho \omega^2 (x^2 + y^2).$$

11. Să se afle debitul volumic Q_v al unui lichid, știind diferența de nivel Δh și secțiunile respective S_1 , S_2 din dispozitivul din fig. 13.25.

R.
$$Q_v = S_1 S_2 \sqrt{\frac{2g\Delta h}{S_1^2 - S_2^2}}$$

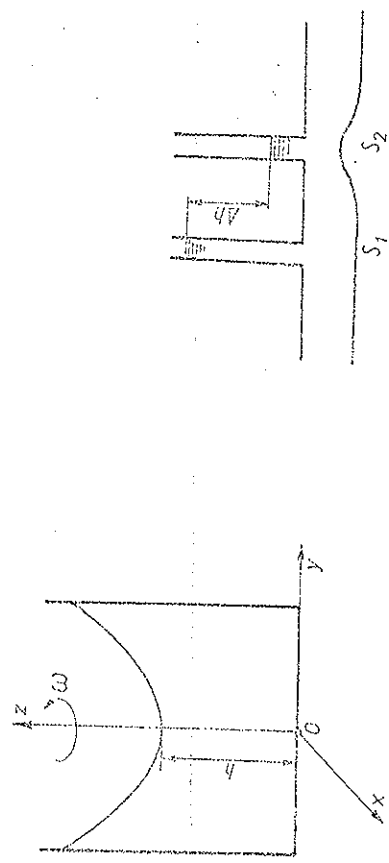


Fig. 13.24

12. Printre-un tub cu gîturătură cu secțiunile S_1 , S_2 se suflă aer (de densitate ρ) cu debitul volumic Q_v . Să se afle diferența de nivel a apei dintr-un manometru în formă de U, ca în fig. 13.26.

R.
$$\Delta h = \frac{Q_v^2}{2g} \rho \frac{S_1^2 - S_2^2}{S_1^2 S_2^2}$$

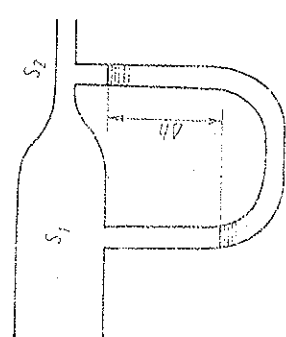


Fig. 13.26

13. În cît timp se evacuează serul dintr-o seringă ținută orizontal, dacă asupra pistonului se apasă cu o forță constantă F ? Secțiunea tubului seringii este S_p , a orificiului este S_o , iar lungimea cursei pistonului este l .

R.
$$t = l \frac{S_p}{S_o} \sqrt{\frac{\rho S_1}{2F} (1 - S_o^2/S_1^2)} \approx l \frac{S_p}{S_o} \sqrt{\frac{\rho S_1}{2F}}$$

14. Dintr-o țevă țigănește un jet de apă de secțiune S_1 cu debitul volumic Q_v . Care va fi secțiunea jetului la înălțimea h deasupra capătului țevii?

R.
$$S_2 = \frac{S_1}{\sqrt{1 - 2gh/S_1^2 Q_v^2}}$$

15. Într-un vas se toarnă uniform un lichid cu debitul volumic Q_v . Care trebuie să fie aria secțiunii orificiului din fundul vasului, pentru ca lichidul din vas să rămână la un nivel constant h . Secțiunea vasului este mult mai mare decît aria orificiului.

R.
$$S = \frac{Q_v}{\sqrt{2gh}}$$

16. Un vas cilindric de înălțime H și secțiune S' este plin cu un lichid. Pe fundul vasului se află un mic orificiu de arie S . În cît timp se golește vasul?

R.
$$t = \sqrt{\frac{2h}{g} (S'^2/S^2 - 1)} \approx \sqrt{\frac{2h}{g} \frac{S'}{S}}$$

17. O șalupă se mișcă rectiliniu uniform, fiind propulsată cu ajutorul unui motor de tip reactiv care absoarbe apa printr-un orificiu de intrare și o ejectionă printr-un orificiu de ieșire. Să se afle randamentul mecanic al motorului, știind că aria orificiului de ieșire este de n ori mai mică decît aria orificiului de intrare.

R.
$$\eta = \frac{2}{1+n}$$

18. O picătură de ploaie cade în aer cu viteză limită în regim laminar. Viscositatea aerului este $\eta = 1,8 \cdot 10^{-4}$ daP. Știind numărul Reynolds critic de trecere de la regim laminar la cel turbulent, în condițiile date, $Re = 0,10$, să se afle valoarea maximă a razei picăturii.

R.
$$r_m = \sqrt[3]{\frac{9\eta^2 Re}{4\rho_{aer} Q_{sp} g}} \approx 2 \cdot 10^{-5} \text{ m.}$$

19. Un vas este umplut cu apă (de densitate ρ_a) și petrol (de densitate ρ). Știind grosimea stratului de apă h_0 și de petrol h , să se afle viteza de scurgere a apei printr-un mic orificiu în fundul vasului.

R.
$$v = \sqrt{2g(h_0 + h\rho/\rho_a)}$$

20. Curgerea laminară în jurul unei sfere de rază R_1 , care se deplasează într-un lichid de densitate ρ_1 și viscositate η_1 , are loc pentru viteze care nu depășesc v_1 . Cu ce viteză minimă v_2 trebuie să se deplaseze o bilă de rază R_2 într-un alt lichid de densitate ρ_2 și viscositate η_2 pentru a avea loc o curgere turbulentă?

R.
$$v_2 = v_1 \frac{\rho_1 R_1 \eta_2}{\rho_2 R_2 \eta_1}$$

21. Printre-un tub de lungime l și rază R curge laminar un fluid viscos de densitate ρ și viscositate η . Viteza pe axa tubului este v_0 . Să se afle: debitul volumic Q , energia cinetică a fluidului din tub E_c , forța de frecare dintre tub și fluid F_f și diferența de presiune dintre capetele tubului.

R.
$$Q = \frac{\pi}{2} v_0 R^2; E_c = \frac{\pi}{6} l R^2 \rho v_0^3; F_f = 4\pi \eta l v_0; \Delta p = \frac{4\eta l v_0}{R^2}$$

22. Considerînd coordonata curbilinie s de-a lungul unei linii de curent, să se deducă ecuația

$$\rho \frac{dv}{ds} = -\frac{\partial p}{\partial s} + \rho g_s$$

unde g_s este proiecția accelerației gravitaționale \vec{g} pe linia de curent. Să se arate că din această ecuație se poate obține ecuația lui Bernoulli.

OSCILAȚII

Oscilațiile prezintă o importanță covârșitoare pentru fizică și tehnică, iar dintre ele cele simple, sinusoidale au rol fundamental, fiindcă orice oscilație poate fi obținută prin suprapunerea unor oscilații sinusoidale (teorema Fourier).

14.1. OSCILATORUL ARMONIC

Oscilatorul armonic este un punct material care execută oscilații sinusoidale pe o dreaptă sub acțiunea unei forțe atractive proporționale cu distanța până la centrul atractiv (centrul mișcării).

a) Reamintim relațiile stabilite mai înainte:

$$x = A \cos(\omega t + \alpha), \quad -A \leq x \leq A, \quad (14.1)$$

unde A este amplitudinea mișcării, $\varphi = \omega t + \alpha$ — faza mișcării, α — faza inițială, $\omega = 2\pi\nu$ — frecvența unghiulară, $\nu = 1/T$ — frecvența, T — perioada mișcării.

Viteza:

$$v = \dot{x} = -\omega A \sin(\omega t + \alpha) =$$

$$= \omega A \cos\left(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right), \quad -\omega A \leq v \leq \omega A, \quad (14.2)$$

viteza este defazată înainte cu $\pi/2$ (sau $T/4$) față de elongație.

Accelerația:

$$a = \ddot{x} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \alpha) = -\omega^2 x = \omega^2 A \cos(\omega t + \alpha + \pi),$$

$$-\omega^2 A \leq a \leq \omega^2 A, \quad (14.3)$$

accelerația este defazată cu π (sau $T/2$) față de elongație, adică este în opoziție de fază cu elongația (fig. 14.1).

Forța:

$$F = ma = -m\omega^2 x = -kx, \quad k = m\omega^2, \quad (14.4)$$

$$\omega = \sqrt{k/m}, \quad T = 2\pi\sqrt{m/k}. \quad (14.5)$$

Ecuatia diferențială a oscilatorului armonic:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (14.6)$$

Mișcarea armonică poate fi reprezentată geometric prin proiecția pe o axă a unui vector de modul A care se rotește în sens trigonometric cu viteza unghiulară ω (fig. 14.2). Proiecția A' a extremității acestui vector execută mișcarea armonică (14.1).

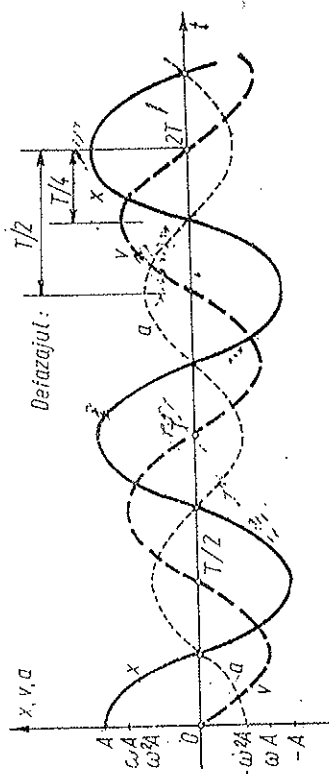


Fig. 14.1

Analog, viteza și accelerația în mișcarea armonică sînt date în fiecare moment de proiecțiile extremității vectorilor de modul ωA , $\omega^2 A$, defazați cu $\pi/2$, respectiv π față de vectorul A (fig. 14.2). Neputem imagina de asemenea că în loc să se rotească vectorii, se rotește axa OX în sens invers.

b) *Energia* cinetică, E_c , potențială U și totală E a oscilatorului armonic sînt:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \alpha); \quad (14.7)$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \alpha) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \alpha), \quad (14.8)$$

$$E_c \text{ max} = U \text{ max}$$

$$E = E_c + U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2. \quad (14.9)$$

Energia totală este constantă (se conservă) și este proporțională cu pătratul amplitudinii și cu pătratul frecvenței.

Energia potențială U se reprezintă printr-o parabolă, iar forța

$$F = -dU/dx = -kx \quad (14.10)$$

printr-o dreaptă (fig. 14.3). Forța se anulează acolo unde energia potențială este minimă.

c) Reamintim definiția *valorii medii* a unei mărimi, de exemplu $x = f(t)$ (fig. 14.4):

$$\bar{x} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt, \quad \bar{x}(b-a) = \int_a^b f(t) dt = S, \quad (14.11)$$

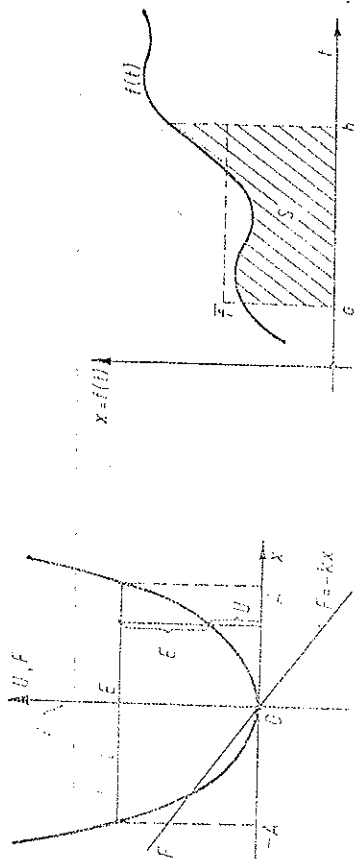


Fig. 14.3

Fig. 14.4

adică aria dreptunghiului având înălțimea \bar{f} și baza $b-a$ este egală cu aria S mărginită de curba $f(t)$, ca și cum am „netezi” curba $f(t)$ pe porțiunea (a, b) astfel ca să obținem cu o curbă „orizontală” $\bar{f} = \text{const}$ aceeași arie.

Valoarea medie depinde de intervalul pe care se face media.

Pentru funcțiile *periodice*, intervalul de mediere se ia egal cu *perioada* (dacă nu se specifică contrariul).

Din definiția valorii medii (14.11) rezultă imediat următoarele proprietăți ale valorilor medii:

$$\overline{f+g} = \bar{f} + \bar{g}, \quad \overline{\text{const} \cdot f} = \text{const} \cdot \bar{f}, \quad (14.12)$$

dar în general $\overline{f \cdot g} \neq \bar{f} \cdot \bar{g}$.

Deoarece valoarea medie a sinusului sau cosinusului pe o perioadă este evident nulă, rezultă imediat:

$$\begin{aligned} \overline{\sin^2 \varphi} &= \frac{1}{2} (1 - \overline{\cos 2\varphi}) = \frac{1}{2}; \quad \overline{\cos^2 \varphi} = \frac{1}{2} (1 + \overline{\cos 2\varphi}) = \frac{1}{2}, \\ \overline{\sin(\varphi + \alpha) \sin(\varphi + \beta)} &= \overline{\cos(\varphi + \alpha) \cos(\varphi + \beta)} = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta), \\ \overline{\sin(\varphi + \alpha) \cos(\varphi + \beta)} &= \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta). \end{aligned} \quad (14.13)$$

Energia cinetică medie este egală cu energia potențială medie:

$$\begin{aligned} \overline{E_c} &= \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \overline{\sin^2(\omega t + \alpha)} = \frac{1}{4} m \omega^2 A^2 = \frac{E}{2}, \\ \overline{U} &= \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \overline{\cos^2(\omega t + \alpha)} = \frac{1}{4} m \omega^2 A^2 = \frac{E}{2}. \end{aligned} \quad (14.14)$$

d) Mișcarea armonică joacă un rol important în fizică. Dacă o particulă (de exemplu, atom, ion) este deplasată din poziția sa de echilibru, în care forța este nulă, apare imediat o forță din partea sistemului (de exemplu, cristalului) orientată înapoi spre poziția de echilibru. Pentru deplasări mici forța este practic proporțională cu deplasarea (primul termen al dezvoltării în serie de puteri Taylor), adică curba forței poate fi aproximată în jurul poziției de echilibru printr-o dreaptă, iar energia potențială printr-o parabolă. Prin urmare, *oscilațiile mici sînt totdeauna armonice*. Efectele anarmonice apar la oscilații de amplitudine mare.

Observație. În mecanica clasică se arată că energia totală a unui oscilator armonic este *cuantificată*, adică poate lua un șir discret de valori:

$$E = h\omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (14.15)$$

unde ω este frecvența unghiulară, $h = 6,625 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, iar $h = 6,6256 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ este constanta lui Planck.

e) Exemple. Reamintim exemplele date mai înainte de oscilații armonice.

1. *Pendulul elastic*. Un corp de masă m suspendat pe un resort de constantă elastică k efectuează oscilații verticale (fig. 14.5, a):

$$F = -kx, \quad T = 2\pi \sqrt{m/k}. \quad (14.16)$$

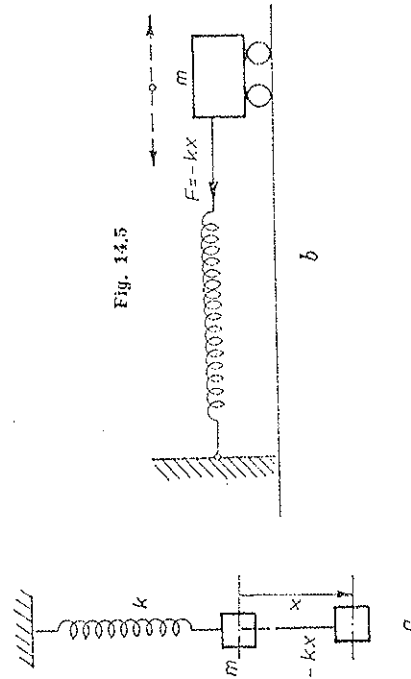


Fig. 14.5

Într-adevăr, poziția de echilibru corespunde resortului alungit cu $x_0 = mg/k$.

Putem fixa resortul orizontal, punând corpul pe un suport cu roțile ca în fig. 14.5, b. Atunci corpul efectuează oscilații pe o dreaptă orizontală (poziția de echilibru corespunde resortului nedeforimat).

2. *Pendulul simplu (matematic) gravitațional.* Componenta $mg \cos \theta$ a greutății compusă cu reacțiunea firului dă accelerația normală (centripetă) (fig. 14.6). Componenta $F_t = mg \sin \theta \approx mg\theta$ (pentru unghiuri mici) dă accelerația tangențială. Coordonata fiind $x \approx l\theta$, rezultă că forța este de tip elastic:

$$F_t \approx -\frac{mg}{l}x = -kx, \quad k = \frac{mg}{l}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (14.17)$$

3. *Pendulul fizic* (fig. 14.7). Ecuația mișcării de rotație:

$$M = -mgl \sin \theta = I \ddot{\theta}, \quad \ddot{\theta} + \frac{mgl}{I} \theta = 0 \quad (\text{oscilații mici}), \quad (14.18)$$

$$\omega^2 = \frac{mgl}{I}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}. \quad (14.19)$$

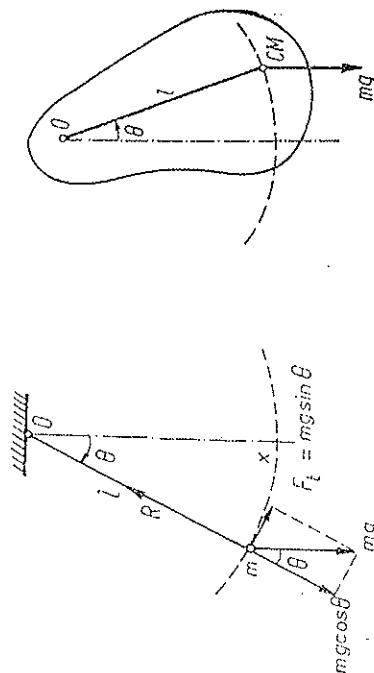


Fig. 14.7

4. *Pendulul de torsiune* (fig. 14.8). Momentul forțelor elastice (12.38), (12.42):

$$M = -\frac{\pi G}{2l} R^4 \theta = -C\theta \quad (\text{unghiuri mici}). \quad (14.20)$$

ecuația oscilațiilor de torsiune:

$$-C\theta = I\ddot{\theta}, \quad \ddot{\theta} + \frac{C}{I}\theta = 0, \quad \omega^2 = \frac{C}{I}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}}. \quad (14.21)$$

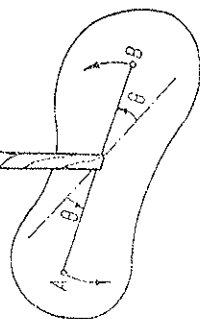


Fig. 14.8

f) Subliniem că frecvența oscilațiilor armonice depinde numai de proprietățile sistemului oscilant (constantele k, m) și nu depinde de amplitudinea sau faza oscilațiilor. Aceasta este legea izocronismului micilor oscilații: oscilațiile mici sînt izocrone, adică perioada lor nu depinde de amplitudinea oscilațiilor. Dimpotrivă, amplitudinea oscilațiilor depinde de condițiile inițiale ale mișcării, adică de elongația și viteza punctului material la un moment inițial dat. Anume, în baza lui (14.1—2), avem pentru $t = 0$:

$$x_0 = A \cos \alpha, \quad v_0 = -\omega A \sin \alpha, \quad \text{de unde amplitudinea și faza inițială:} \quad A = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega^2}, \quad \text{tg} \alpha = -\frac{v_0}{\omega x_0}. \quad (14.22)$$

14.2. REPREZENTAREA COMPLEXĂ A OSCILAȚIILOR SINUSOIDALE

Oscilațiile armonice, sinusoidale, pot fi reprezentate și ca parte reală (sau imaginară) a unui număr complex de modul A și de argument egal cu faza oscilației $\varphi = \omega t + \alpha$.

a) În adevăr, un număr complex $z = a + ib$ ($a, b \in R, i^2 = -1$) se reprezintă în planul complex \mathbb{C} (fig. 14.9) printr-un punct sau prin vectorul respectiv. (A nu se confunda planul reprezentării numerelor complexe cu planul real. În planul complex \mathbb{C} numai axa OR este reală.)

Notăm partea reală, partea imaginară, modulul și argumentul numărului complex z astfel:

$$a = \text{Re}\{z\} = \text{Re}\{a + ib\}, \quad b = \text{Im}\{z\} = \text{Im}\{a + ib\}, \quad (14.23)$$

$$|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\arg z = \theta = \arctg \frac{b}{a}.$$

În baza formulelor lui Euler:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta, \quad \cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}), \quad \sin \theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \quad (14.24)$$

putem scrie

$$z = a + ib = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho e^{i\theta}, \quad |e^{i\theta}| = 1, \quad (14.25)$$

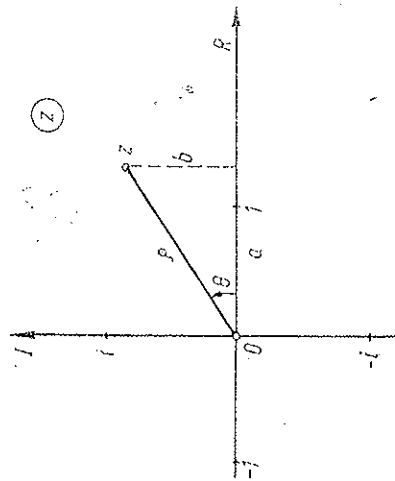


Fig. 14.9

b) Dacă acum privim vectorii din fig. 14.2 ca reprezentând numere complexe în planul complex, axa OX fiind considerată axă reală, putem scrie

$$z = A \cos(\omega t + \alpha) = \operatorname{Re}\{A e^{i(\omega t + \alpha)}\} = \operatorname{Re}\{\bar{A} e^{i\omega t}\}, \quad (14.26)$$

unde

$$\bar{A} \stackrel{\text{def}}{=} A e^{i\alpha}, |\bar{A}| = A \text{ (reamintim că } |e^{i\alpha}| = 1) \quad (14.27)$$

este *amplitudinea complexă*: modulul ei dă amplitudinea obișnuită reală A , iar argumentul ei dă faza inițială α . Factorul temporal $e^{i\omega t}$ este util să-l separăm, punându-l în evidență (uneori este chiar omis în calculele intermediare, punându-l la nevoie în rezultatul final).

Deoarece operația de luare a părții reale Re este comutativă cu operația de sumare Σ :

$$\operatorname{Re}\left\{\sum_k z_k\right\} = \sum_k \operatorname{Re}\{z_k\} \quad (14.28)$$

sau

$$\operatorname{Re}\{z_1 + z_2 + \dots\} = \operatorname{Re}\{z_1\} + \operatorname{Re}\{z_2\} + \dots,$$

putem face întii operațiile de adunare algebrică, înmulțire cu numere *reale*, derivare sau integrare asupra numerelor complexe reprezentative și apoi, la sfârșit, să luăm partea reală a rezultatului obținut. Acest procedeu prezintă avantaje, deoarece operațiile cu funcțiile exponențiale (mai ales derivările și integrările) sînt mai ușoare decît cu funcțiile trigonometrice. Pentru simplificare, semnul Re de obicei se omite în calculele intermediare, scriindu-l la nevoie doar în rezultatul final.

Numărul complex reprezentativ se notează de obicei cu aceeași literă ca și mărimea reală reprezentată, dar prevăzută cu un punct sau o bară deasupra (la noi însă punctul înseamnă derivata în raport cu timpul, iar bara — valoarea medie) sau prin alte semne.

Noi vom nota numărul complex reprezentativ cu aceeași literă ca și mărimea reală reprezentată, deoarece din context rezultă de fiecare dată despre care mărime este vorba.

Regula de derivare. Derivarea mărimilor sinusoidale în raport cu timpul revine la înmulțirea lor cu $i\omega = \omega e^{i\pi/2}$ (unde $i = e^{i\pi/2}$), adică la înmulțirea lor cu ω și *defazarea* cu $\pi/2$ înainte.

Mai general, înmulțirea cu un număr complex $\rho e^{i\theta}$ înseamnă amplificarea cu ρ și *defazarea* înainte cu θ .

De exemplu, pentru viteza avem:

$$\begin{aligned} v = \dot{z} &= (\bar{A} e^{i\omega t})' = i\omega \bar{A} e^{i\omega t} = i\omega \bar{A} e^{i(\omega t + \pi/2)} = \\ &= \omega A e^{i(\omega t + \pi/2)}, \end{aligned} \quad (14.29)$$

de unde viteza reală:

$$v = \operatorname{Re}\{\omega A e^{i(\omega t + \pi/2)}\} = \omega A \cos(\omega t + \alpha + \pi/2);$$

în fig. 14.2 se vede clar cum vectorul amplitudinii a fost înmulțit cu ω și rotit în sens trigonometric cu $\pi/2$;

pentru accelerație:

$$\begin{aligned} a = \ddot{z} &= i\omega v = i\omega \dot{z} = i\omega(i\omega z) = -\omega^2 z = -\omega^2 \bar{A} e^{i\omega t} = \\ &= \omega^2 A e^{i(\omega t + \alpha + \pi)}, \quad (-1 = e^{i\pi}), \end{aligned} \quad (14.30)$$

de unde accelerația reală:

$$\ddot{z} = \operatorname{Re}\{\omega^2 A e^{i(\omega t + \alpha + \pi)}\} = \omega^2 A \cos(\omega t + \alpha + \pi);$$

în fig. 14.2 se vede cum prin derivare vectorul vitezei a fost amplificat cu ω și rotit în sens trigonometric cu $\pi/2$.

c) *Energia* nefiind liniară, ci pătratică în amplitudine, nu se pot înmulți direct numerele complexe reprezentative, deoarece $\operatorname{Re}\{z^2\} \neq [\operatorname{Re}\{z\}]^2$. Putem însă ocoli dificultatea folosind numerele *complex conjugate*:

$$z = a + ib = \rho e^{i\theta}, \quad z^* = a - ib = \rho e^{-i\theta}, \quad (14.31)$$

(* — conjugarea complexă),

$$z z^* = a^2 + b^2 = \rho^2 = |z|^2, \quad z + z^* = 2 \operatorname{Re}\{z\}, \quad (14.32)$$

$$(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*, \quad (z^*)^* = z.$$

Deoarece modulul numărului complex reprezentativ este egal cu amplitudinea mărimii respective (adică egal cu valoarea maximă), de exemplu:

$$|x|^2 = x x^* = \bar{A} A^* = |\bar{A}|^2 = A^2, \quad |v|^2 = v v^* = \omega^2 A^2, \quad (14.33)$$

(aici x și v sînt numere complexe), rezultă că energiile medii (14.14) și energia totală se scriu astfel:

$$\begin{aligned} \bar{v}^2 &= \frac{1}{2} v v^* = \frac{1}{2} |v|^2, \quad \bar{E}_c = \frac{1}{2} m \frac{v v^*}{2}, \\ \bar{x}^2 &= \frac{1}{2} x x^* = \frac{1}{2} |x|^2, \quad \bar{U} = \frac{1}{2} k \frac{x x^*}{2}, \end{aligned} \quad (14.34)$$

$$E = \bar{E}_c + \bar{U} = \frac{1}{2} m v v^* = \frac{1}{2} k x x^* = \frac{1}{2} m |v|^2 = \frac{1}{2} k |x|^2, \quad (14.35)$$

(aici x și v sînt numere complexe).

Reprezentarea complexă a oscilațiilor armonice se folosește curent în electrofizică și în electrodinamică.

14.3. COMPUNEREA OSCILAȚIILOR ARMONICE PARALELE

a) Să considerăm mai întii compunerea a două oscilații de aceeași direcție (paralele) și de *aceeași frecvență* (suprapunerea oscilațiilor paralele). Rezul-

tatul este tot o oscilație armonică de aceeași direcție și de aceeași frecvență. În adevăr,

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + A_2 \cos(\omega t + \alpha_2) = A \cos(\omega t + \alpha), \quad (14.36)$$

unde A , α sînt amplitudinea și faza inițială a oscilației rezultante. Dezvoltînd cosinusurile și făcînd identificările avem:

$$A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2 = A \cos \alpha, \quad A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2 = A \sin \alpha,$$

de unde rezultă amplitudinea A și faza inițială α a oscilației rezultante:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)},$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{A} (A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2),$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{A} (A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2), \quad (14.37)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}.$$

Aceiași rezultat se obține cu ajutorul reprezentării complexe:

$$\begin{aligned} x = x_1 + x_2 &= A_1 e^{i(\omega t + \alpha_1)} + A_2 e^{i(\omega t + \alpha_2)} = \bar{A}_1 e^{i\omega t} + \bar{A}_2 e^{i\omega t} = \\ &= (\bar{A}_1 + \bar{A}_2) e^{i\omega t} = \bar{A} e^{i\omega t} = A e^{i(\omega t + \alpha)}, \end{aligned} \quad (14.38)$$

$$\bar{A} = A e^{i\alpha} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2 = A_1 e^{i\alpha_1} + A_2 e^{i\alpha_2}.$$

După cum am spus, de obicei, scriem direct ultima relație, omițînd de la bun început factorul temporal $e^{i\omega t}$.

Cum modulul și argumentul unui număr complex sînt date de (14.23), (14.32), obținem imediat amplitudinea și faza inițială a oscilației rezultante:

$$\begin{aligned} A^2 = \bar{A} \bar{A}^* &= (\bar{A}_1 + \bar{A}_2)(\bar{A}_1 + \bar{A}_2)^* = \bar{A}_1 \bar{A}_1^* + \bar{A}_2 \bar{A}_2^* + \bar{A}_1 \bar{A}_2^* + \\ &+ \bar{A}_1^* \bar{A}_2 = A_1^2 + A_2^2 + 2 \operatorname{Re} \{ \bar{A}_1 \bar{A}_2^* \} = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2); \end{aligned}$$

$$\bar{A} = A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2 + i(A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2),$$

$$A = |\bar{A}| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}. \quad (14.39)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \arg \bar{A} = \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}.$$

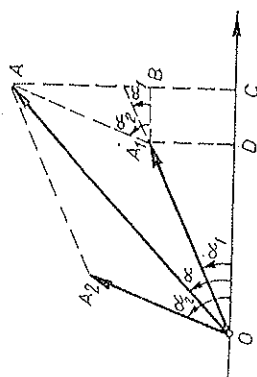
b) *Grafic*, compunerea oscilațiilor sinusoidale revine la compunerea vectorilor reprezentativi după regula paralelogramului (*construcția grafică a lui Fresnel*, fig. 14.10). În adevăr, suma (algebrică a) proiecțiilor mai multor vectori este egală cu proiecția rezultantei lor (liniei de închidere a poligonului format cu vectorii respectivi). Astfel, din triunghiul OA_1A avem, conform teoremei cosinusului:

$$\begin{aligned} A^2 &= A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos(\pi - (\alpha_2 - \alpha_1)) = \\ &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1), \end{aligned}$$

iar din triunghiul OAC avem

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{AC}{OC} = \frac{BC + AB}{OD + DC} = \\ &= \frac{A_1 \sin \alpha_1 + A_2 \sin \alpha_2}{A_1 \cos \alpha_1 + A_2 \cos \alpha_2}. \end{aligned}$$

Fig. 14.10



Amplitudinea oscilației rezultante depinde de diferența de fază $\alpha_2 - \alpha_1$ a oscilațiilor componente. Astfel, de exemplu:

$$A = A_1 + A_2 \text{ pentru } \alpha_2 - \alpha_1 = 2n\pi,$$

$$A = |A_1 - A_2| \text{ pentru } \alpha_2 - \alpha_1 = (2n-1)\pi, \quad (n - \text{număr întreg}) \quad (14.40)$$

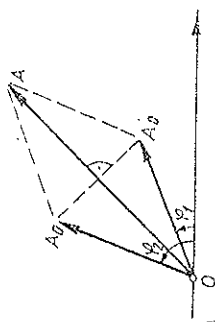
În primul caz oscilațiile sînt în fază și amplitudinea rezultantă este egală cu suma amplitudinilor componente (amplitudinile se adună), în ultimul caz oscilațiile sînt în opoziție de fază și amplitudinea rezultantă este egală cu diferența amplitudinilor componente (amplitudinile se scad).

c) Dacă frecvențele oscilațiilor componente *diferă* între ele, oscilația rezultantă nu mai este armonică. În adevăr, vectorii reprezentativi se rotesc cu viteze unghiulare diferite, deci unghiul dintre ei variază, dar atunci rezultanta lor variază ca modul și totodată nu se rotește uniform, ceea ce ar însemna amplitudine și frecvență *variabilă*.

În cazul particular $A_1 = A_2$, deși amplitudinea rezultantă este variabilă, frecvența rezultantă este constantă. Paralelogramul devine romb (fig. 14.11), astfel încît amplitudinea și faza oscilației rezultante rezultă direct din construcția grafică:

$$\begin{aligned} A &= 2A_0 \left| \cos \frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1) \right| = \\ &= 2A_0 \left| \cos \frac{1}{2} \{ (\omega_2 - \omega_1)t + \alpha_2 - \alpha_1 \} \right|, \end{aligned}$$

Fig. 14.11



$$\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) \quad (14.41)$$

sau transformând direct suma de cosinusuri în produs:

$$\begin{aligned}
 x &= A_0 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + A_0 \cos(\omega_2 t + \alpha_2) = \\
 &= 2A_0 \cos\left[\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)t + \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1)\right] \cos\left[\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)\right]. \quad (14.42)
 \end{aligned}$$

Rezultatul acesta se poate obține și cu ajutorul numerelor complexe, scoțind factorul temporal eⁱ $\left[\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t + \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)\right]$ și anume:

$$x = A_0 e^{i(\omega_1 t + \alpha_1)} + A_0 e^{i(\omega_2 t + \alpha_2)} = 2A_0 \exp i \frac{1}{2} [(\omega_1 + \omega_2)t + \alpha_1 + \alpha_2].$$

$$\cdot \frac{1}{2} \left\{ \exp i \frac{1}{2} [(\omega_1 - \omega_2)t + \alpha_1 - \alpha_2] + \exp i \frac{1}{2} [(\omega_2 - \omega_1)t + \alpha_2 - \alpha_1] \right\}.$$

Prinul factor temporal dă oscilația sinusoidală de frecvență $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$, iar paranteza mare dă amplitudinea (conform formulei lui Euler pentru cos θ).

Schimbând convenabil originea timpului (momentul inițial), putem desființa faza $\alpha_2 - \alpha_1$ și obținem astfel expresia mai simplă:

$$x = 2A_0 \cos \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)t \cdot \cos \left[\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t + \alpha \right]. \quad (14.43)$$

Observăm că *amplitudinea* oscilațiilor este dată de (14.41), adică de *modulul* cosinusului respectiv.

În cazul când frecvențele $\omega_{1,2}$ sînt foarte apropiate între ele:

$$\omega_1 \approx \omega_2, \quad |\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_{1,2}, \quad (14.44)$$

oscilația rezultantă va fi aproape sinusoidală, de frecvență $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$, avînd însă amplitudinea *lent* variabilă cu frecvența $|\omega_2 - \omega_1|$ (modulul sinusului sau modulul cosinusului are frecvență dublă), conform lui (14.43). Acesta este *fenomenul bătailor* (fig. 14.12).

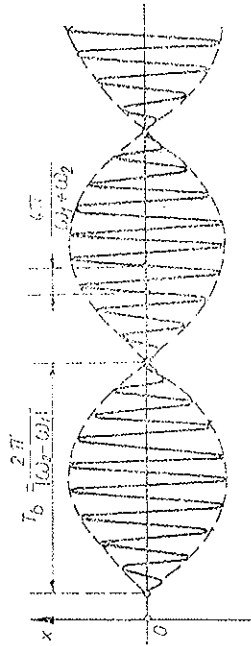


Fig. 14.12

În cazul frecvențelor acustice, sunetul de frecvență $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ se aude succesiv întărindu-se și slăbindu-se cu frecvența și perioada bătailor:

$$\nu_b = |\nu_2 - \nu_1|, \quad T_b = \frac{1}{\nu_b} = \frac{T_1 T_2}{|T_2 - T_1|} = \frac{2\pi}{|\omega_2 - \omega_1|}. \quad (14.45)$$

d) Fenomenul bătailor de mai sus este un caz particular al așa-numitelor „oscilații sinusoidale modulate” (ca în radiofonie), adică oscilații de tip sinusoidal, dar cu amplitudine variabilă *lent* după o anumită lege. De exemplu (fig. 14.13):

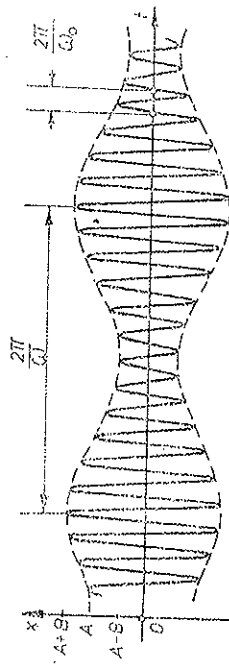


Fig. 14.13

$x = (A + B \cos \omega t) \cos \omega_0 t$, $\omega \ll \omega_0$, $B < A$, (14.46)
se compune din trei oscilații armonice de frecvențe diferite:

$$x = A \cos \omega_0 t + \frac{B}{2} \cos(\omega_0 + \omega)t + \frac{B}{2} \cos(\omega_0 - \omega)t. \quad (14.47)$$

În radiofonie, ω este frecvența sunetului (audiofrecvența) (frecvența „anvelopei”), ω_0 — frecvența purtătoare, înaltă (radiofrecvența), $\omega_0 \pm \omega$ sînt frecvențele laterale.

Mai general, o oscilație compusă din oscilații armonice este caracterizată de *spectrul* său — o diagramă în care sînt reprezentate frecvențele oscilațiilor sinusoidale componente și amplitudinile lor, nu apar însă reprezentate în această diagramă defazajele relative. De exemplu, pentru oscilația modulată (14.46—47) spectrul este reprezentat în fig. 14.14. Dacă se transmite un sunet compus (vorbire, orchestră), atunci vom avea două *benzi* laterale.

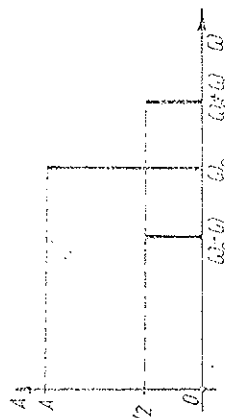


Fig. 14.14

14.4. COMPUNEREA OSCILAȚIILOR ARMONICE PERPENDICULARE

a) Să considerăm mai întâi compunerea oscilațiilor de direcții perpendiculare și de *aceeași* frecvență:

$$x = A \cos(\omega t + \alpha), \quad y = B \cos(\omega t + \beta). \quad (14.48)$$

Aceste ecuații reprezintă coordonatele punctului material, deci și ecuațiile parametriche ale traiectoriei sale (t — parametru). Prin eliminarea timpului se obține ecuația unei *elipse*:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} \cos(\beta - \alpha) = \sin^2(\beta - \alpha). \quad (14.49)$$

În particular, dacă $\beta - \alpha = 0$ sau π , elipsa degenerază în două drepte confundate de-a lungul cărora oscilează punctul material:

$$y = \pm \frac{B}{A}x, \text{ dacă } \beta - \alpha = 0 \text{ sau } \pi. \quad (14.50)$$

Dacă diferența de fază $\beta - \alpha = \pi/2$ sau $3\pi/2$, elipsa va avea axele de simetrie în direcțiile oscilațiilor componente:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1, \text{ dacă } \beta - \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ sau } \frac{3\pi}{2}. \quad (14.51)$$

Pentru $\beta - \alpha = \pi/2$ ecuațiile (14.48) devin

$$x = A \cos(\omega t + \alpha), \quad y = B \cos(\omega t + \alpha + \pi/2) = -B \sin(\omega t + \alpha),$$

de unde se vede că elipsa (14.51) este parcursă în sens invers trigonometric. În celălalt caz ($\beta - \alpha = 3\pi/2$) elipsa este parcursă în sens trigonometric. Dacă în plus $A = B$, elipsa devine cerc.

Este interesant că dacă suprapunem două mișcări *circulare*, parcurse în sensuri opuse (cu faze egale în modul), obținem o oscilație armonică *liniară* de amplitudine dublă (fig. 14.15):

$$x = 2A \sin(\omega t + \alpha).$$

Invers, o oscilație armonică liniară poate fi descompusă în două oscilații circulare de aceeași frecvență, de sensuri opuse, și de amplitudini pe jumătate. Acest fapt își găsește o aplicație în optică pentru legătura dintre lumina polarizată liniar și lumina polarizată circular.

b) Dacă frecvențele sînt *diferite*, punctul descrie o traiectorie complicată. Dacă raportul frecvențelor este *rațional* (adică raport de numere întregi), traiectoria este stabilă (fixă), dar forma depinde și de diferența de fază. Traiectoriile obținute se numesc în acest caz *figuri Lissajoux* (fig. 14.16).

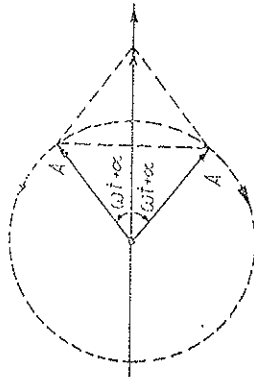


Fig. 14.15

Raportul dintre numărul punctelor de tangență a traiectoriei cu o dreaptă verticală și una orizontală sau raportul dintre numărul punctelor de intersecție a traiectoriei cu o dreaptă verticală și una orizontală este egal cu raportul frecvențelor oscilațiilor componente.

Dacă raportul frecvențelor nu este rațional, punctul descrie o curbă care acoperă treptat o arie.

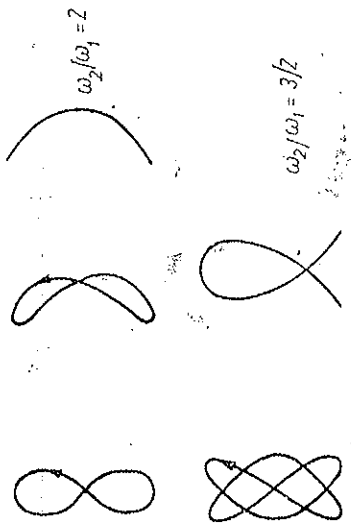


Fig. 14.16

14.5. OSCILAȚIILE AMORTIZATE

a) Datorită interacțiunii cu mediul în care efectuează oscilații, particula pierde continuu energie prin radiație sau prin frecare. Cum energia oscilațiilor este proporțională cu pătratul amplitudinii, înseamnă că amplitudinea scade cu timpul, adică oscilațiile se sting, se amortizează. Disiparea energiei oscilațiilor datorită interacțiunii sale cu mediul nu este un proces pur mecanic și poate fi explicată pe baza altor capitole ale fizicii (termodinamica, fizica statistică, electrodinamica), dar în multe cazuri efectul mediului poate fi descris fenomenologic printr-un model de forță de rezistență.

De exemplu, în cazul unui mediu viscos, în regim laminar de curgere, forța de rezistență (frecare) poate fi considerată proporțională cu viteza particulei (Stokes); în regim turbulent forța de rezistență este proporțională cu pătratul vitezei; pentru frînarea datorită radiației electromagnetice forța de rezistență (de frînare) este proporțională cu derivata accelerației; în cazul frecării uscate solid-solid, forța de frecare este constantă în modul, schimbându-și doar semnul.

Vom studia mai jos numai cazul forței de frecare proporționale cu viteza particulei, ca, de exemplu, în cazul unui pendul gravitațional sau elastic aflat într-un mediu viscos. Forța de rezistență a mediului micșorează viteza particulei, fiind orientată în sens *opus* vitezei:

$$\vec{R} = -r\vec{v}, \quad R = -rv = -r\dot{x}, \quad [r] = \text{kg/s în SI}, \quad (14.52)$$

unde r se numește *coeficient de rezistență*

Ecuația oscilațiilor amortizate este deci

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}, \quad m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0 \text{ sau } \ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega^2x = 0, \quad (14.53)$$

unde

$$b = \frac{r}{2m}, \quad \omega^2 = \frac{k}{m}, \quad [b] = \text{s}^{-1}, \quad (14.54)$$

unde ω este frecvența oscilațiilor proprii în *absența* amortizării, iar b se numește *coeficient de amortizare*.

Soluțiile ecuației diferențiale liniare omogene cu coeficienți constanți (14.53) sînt de forma Ce^{pt} . Introducînd această soluție în ecuația (14.53), obținem *ecuația caracteristică* pentru p :

$$p^2 + 2\delta p + \omega^2 = 0, \quad p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}. \quad (14.55)$$

Soluția generală este o suprapunere a celor două soluții:

$$x = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} \text{ dacă } p_1 \neq p_2. \quad (14.56)$$

Distingem trei cazuri, după cum rădăcinile ecuației caracteristice (14.55) sînt complexe conjugate, reale distincte sau confundate.

b) *Oscilații amortizate pseudoperiodice*. Dacă $b < \omega$, adică coeficientul de amortizare este suficient de mic ($\gamma < 2\sqrt{mk}$), rădăcinile $p_{1,2}$ sînt complexe. Obținem soluții reale dacă și constantele $C_{1,2}$ sînt complex conjugate între ele, anume

$$C_1 = \frac{1}{2} A_0 e^{i\alpha}, \quad C_2 = \frac{1}{2} A_0 e^{-i\alpha},$$

unde A_0 , α sînt alte două constante arbitrare reale. Soluția se scrie atunci, fiind seama de formulele lui Euler (14.24), astfel:

$$x = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega' t + \alpha) = A \cos(\omega' t + \alpha),$$

$$A = A_0 e^{-\delta t} = A_0 e^{-\frac{\gamma}{2m} t}, \quad (14.57)$$

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - \delta^2} = \sqrt{k/m - \gamma^2/4m^2} < \omega = \sqrt{k/m}; \quad (14.58)$$

$$x = A_0 e^{-\frac{\gamma}{2m} t} \cos\left(\sqrt{k/m - \gamma^2/4m^2} \cdot t + \alpha\right), \quad (14.58')$$

unde ω' este frecvența oscilațiilor libere *amortizate*, numită și *pseudofrecvență* (sau pseudopulsatie). Ea este *mai mică* decît frecvența oscilațiilor proprii $\omega = \sqrt{k/m}$ în absența amortizării (frecărilor), deoarece frecvențele totdeauna se opun mișcării și o înfrize, măbind perioada, deci micșorînd frecvența oscilațiilor.

Oscilațiile amortizate (14.57) sînt de tip sinusoidal, dar cu amplitudinea descrescătoare exponențial: $A = A_0 e^{-\delta t}$ (fig. 14.17).

Raportul elongațiilor sau al amplitudinilor la un interval de timp egal cu perioada T' este:

$$\frac{x(t)}{x(t+T')} = \frac{A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega' t + \alpha)}{A_0 e^{-\delta(t+T')} \cos[\omega'(t+T') + \alpha]} = e^{\delta T'}.$$

Logaritmul natural al acestui raport se numește *decrement logarithmic*:

$$D = \delta T' = \frac{2\pi\delta}{\omega'} = \frac{2\pi\delta}{\sqrt{\omega^2 - \delta^2}} = \frac{\pi\gamma}{m\sqrt{k/m - \gamma^2/4m^2}}. \quad (14.59)$$

Spre deosebire de coeficientul de amortizare $b = \gamma/2m$, decrementul logarithmic D este *adimensional* și caracterizează de asemenea gradul de amortizare a oscilațiilor. Cu ajutorul lui se poate compara gradul de amortizare a oscilațiilor de naturi diferite (mecanice, electrice, acustice etc.).

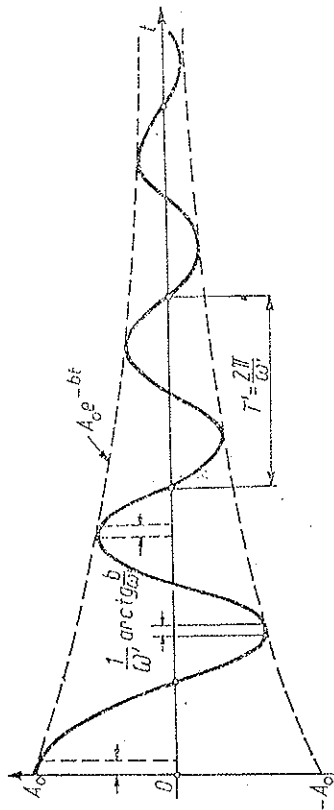


Fig. 14.17

O măsură a duratei oscilațiilor amortizate este inversul coeficientului de amortizare b , numit *timp de relaxare* (sau „timp de viață”) $\tau = 1/b = 2m/\gamma$. El ne arată în cît timp amplitudinea $A = A_0 e^{-t/\tau}$ scade de $e = 2,718$ ori. Inversul decrementului logarithmic este atunci egal cu numărul oscilațiilor efectuate într-un timp egal cu timpul de relaxare:

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{bT'} = \frac{\tau}{T'} = N_0, \quad \left(\tau = \frac{1}{b}\right). \quad (14.60)$$

Timpul de înjumătățire $T_{1/2}$ a amplitudinii rezultă din condiția

$$A_0 e^{-b(t+T_{1/2})} = \frac{1}{2} A_0 e^{-bt}, \quad T_{1/2} = \frac{\ln 2}{b} = \ln 2 \cdot \tau = 0,693 \tau. \quad (14.61)$$

Dacă amortizarea este mică, adică $b \ll \omega$ (sau $\gamma \ll \sqrt{mk}$), atunci ($\omega' \approx \omega$):

$$D = bT' \approx 2\pi \frac{b}{\omega} = \frac{\pi\gamma}{m\omega} \ll 1, \quad (b \ll \omega), \quad N_0 = \frac{1}{D} \gg 1, \quad (14.62)$$

adică în timpul de viață se efectuează un număr mare de oscilații. Atunci amplitudinea oscilațiilor amortizate aproape că nu se schimbă în timpul unei perioade și putem calcula în acest caz *energia* oscilatorului cu formula cunoscută de la oscilatorul armonic, neglijînd variația amplitudinii, adică a factorului e^{-bt} , pe timpul *unei* perioade:

$$E = \frac{1}{2} m \omega'^2 A^2 = \frac{1}{2} m \omega'^2 A_0^2 e^{-2bt} = E_0 e^{-2bt} = E_0 e^{-\frac{2t}{\tau}}, \quad (14.63)$$

adică energia scade exponențial cu timpul cu coeficientul de atenuare $2\delta = \gamma/m$.

c) Mișcarea amortizată aperiodică. În cazul $b > \omega$ (sau $r > 2/\sqrt{mk}$), adică coeficientul de amortizare este suficient de mare, rădăcinile $\rho_{1,2}$ sînt reale negative și soluția generală este

$$x = C_1 e^{-(b+\sqrt{b^2-\omega^2})t} + C_2 e^{-(b-\sqrt{b^2-\omega^2})t} = e^{-bt} (C_1 e^{-\sqrt{b^2-\omega^2}t} + C_2 e^{\sqrt{b^2-\omega^2}t}), \quad (14.64)$$

adică elongația tinde asimptotic către zero, corpul poate trece cel mult o singură dată prin poziția de echilibru, în funcție de condițiile inițiale (fig. 14.18). Mișcarea se numește *amortizată aperiodică* (riguros vorbind, orice mișcare amortizată este aperiodică).

În cazul $b = \omega$ rădăcinile $\rho_{1,2}$ coincid și soluția generală este

$$x = (C_1 + C_2 t) e^{-bt}. \quad (14.65)$$

Acesta este un caz particular al amortizării aperiodice, numit *mișcare aperiodică critică* (seamănă cu fig. 14.18).

d) Disiparea energiei. Energia oscilatorului scade în timp. Să calculăm scăderea energiei în unitatea de timp, adică *puterea disipată*.

Deoarece *variația energiei mecanice este egală cu lucrul mecanic al forțelor neconservative*, avem

$$dE = -r\dot{x}dx, \quad \frac{dE}{dt} = -r\dot{x}^2 = -rv^2 = -2bmv^2. \quad (14.66)$$

Expresia pătratică în viteză

$$Q = \frac{dE}{dt} = -\frac{1}{2} r\dot{x}^2 = -\frac{1}{2} rv^2 = bmv^2 \quad (14.67)$$

se numește *funcție de disipație*. Ea are două proprietăți: derivata sa în raport cu viteza este egală cu forța disipativă cu semn schimbat:

$$F_r = -\frac{dQ}{d\dot{x}} = -r\dot{x} = -rv \quad (14.68)$$

și puterea disipată este egală cu dublul funcției de disipație:

$$-\dot{E} = 2Q = r\dot{x}^2 = rv^2. \quad (14.69)$$

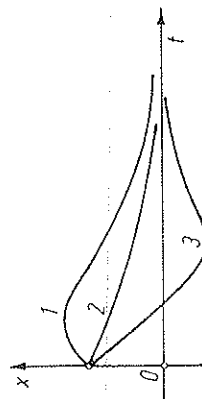


Fig. 14.18

14.6. OSCILAȚIILE FORȚATE

a) Datorită forței de frecare $-r\dot{x}$, care „consumă” din energia oscilatorului, oscilațiile sînt amortizate. Pentru a întreține oscilațiile trebuie să intervenim cu o forță din afară asupra sistemului oscilant pentru a compensa „pierderile” de energie datorită frecărilor.

Să presupunem că asupra particulei acționează o forță *periodică* (cazul cel mai interesant practic):

$$F = F_0 \cos \Omega t. \quad (14.70)$$

Experiența arată că după trecerea unui regim *transitoriu*, se stabilește regimul *permanent* în care particula efectuează *oscilații întreținute de amplitudine constantă și cu frecvența forței periodice exterioare, numite oscilații forțate*.

Ecuția diferențială este

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \Omega t, \quad (14.71)$$

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m} F_0 \cos \Omega t.$$

În matematică se demonstrează că soluția generală a ecuației cu partea dreaptă (14.71) se compune din soluția *generală* a ecuației omogene corespunzătoare (fără partea dreaptă), plus o soluție *particulară* a ecuației complete.

Soluția generală a ecuației omogene, fără membru drept, reprezintă oscilațiile libere (proprii) care au fost studiate în paragraful precedent. Soluția particulară a ecuației complete (14.71) reprezintă tocmai oscilațiile forțate care rămîn în regimul permanent, după stingerea oscilațiilor proprii (datorită factorului exponențial descrescător e^{-bt}).

b) Soluția *particulară* a ecuației (14.71) se obține ușor cunoscînd metoda de compunere a oscilațiilor sinusoidale (14.37).

Deoarece membrul drept este periodic cu frecvența Ω , trebuie ca și membrul stîng să fie periodic cu aceeași frecvență, de aceea căutăm soluția particulară de forma $x = B \cos(\Omega t + \beta)$, de unde

$$\dot{x} = \Omega B \cos(\Omega t + \beta + \pi/2), \quad \ddot{x} = -\Omega^2 B \cos(\Omega t + \beta).$$

Introducînd în ecuația (14.71), avem:

$$-\Omega^2 B \cos(\Omega t + \beta) + 2b\Omega B \cos(\Omega t + \beta + \pi/2) + \omega^2 B \cos(\Omega t + \beta) = \frac{1}{m} F_0 \cos \Omega t,$$

$$B(\omega^2 - \Omega^2) \cos(\Omega t + \beta) + 2B\Omega b \cos(\Omega t + \beta + \pi/2) = \frac{1}{m} F_0 \cos \Omega t.$$

În membrul stîng aplicăm formula de compunere a oscilațiilor sinusoidale (14.37) și obținem

$$B \sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\Omega^2 b^2} \cdot \cos(\Omega t + \alpha) = \frac{1}{m} F_0 \cos \Omega t,$$

unde faza rezultantă α trebuie să fie nulă ca în membrul drept:

$$0 = \sin \alpha = \frac{B(\omega^2 - \Omega^2) \sin \beta + 2B\Omega b \sin(\beta + \pi/2)}{B\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\Omega^2 b^2}},$$

$$1 = \cos \alpha = \frac{B(\omega^2 - \Omega^2) \cos \beta + 2B\Omega b \cos(\beta + \pi/2)}{B\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\Omega^2 b^2}},$$

de unde rezultă

$$B = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\Omega^2 b^2}} = \frac{F_0}{\Omega\sqrt{r^2 + (\Omega m - k/\Omega)^2}}, \quad (14.72)$$

$$\sin \beta = \frac{-2\Omega b}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\Omega^2 b^2}} = \frac{-r}{\sqrt{r^2 + (\Omega m - k/\Omega)^2}} < 0,$$

$$\text{deci } \beta \in (0, -\pi), \quad (14.73)$$

$$\cos \beta = \frac{\omega^2 - \Omega^2}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\Omega^2 b^2}} = \frac{k/\Omega - m\Omega}{\sqrt{r^2 + (\Omega m - k/\Omega)^2}},$$

$$\text{pentru } \Omega < \omega, \cos \beta > 0, \text{ deci } \beta \in \left(0, -\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\text{pentru } \Omega > \omega, \cos \beta < 0, \text{ deci } \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\pi\right);$$

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{2\Omega b}{\omega^2 - \Omega^2} = \frac{r}{m\Omega - k/\Omega}. \quad (14.74)$$

c) Soluția particulară a ecuației (14.71) se obține ușor sub forma complexă, prin metoda reprezentării complexe a oscilațiilor sinusoidale (fig. 14.19, $\beta < 0$ după cum am văzut):

$$x = \bar{B} e^{i\Omega t} = B e^{i(\Omega t + \beta)}, \quad \dot{x} = i\Omega x, \quad \ddot{x} = -\Omega^2 x.$$

Introducând în ecuația diferențială (14.71), obținem:

$$(-\Omega^2 + 2i\Omega b + \omega^2)x = \frac{1}{m} F_0 e^{i\Omega t} \sin(\omega^2 - \Omega^2 + 2i\Omega b) \bar{B} = \frac{1}{m} F_0, \quad (14.75)$$

(am omis, ca de obicei, factorul temporal $e^{i\Omega t}$), de unde

$$x = \frac{F_0 e^{i\Omega t}}{m(\omega^2 - \Omega^2 + 2i\Omega b)} = \bar{B} e^{i\Omega t} = B e^{i(\Omega t + \beta)} \quad (14.76)$$

cu amplitudinea $B = |x|$ și faza inițială $\beta = \arg \bar{B}$:

$$B = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\Omega^2 b^2}} = \frac{F_0}{\Omega\sqrt{r^2 + (\Omega m - k/\Omega)^2}}, \quad (14.72)$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{-2\Omega b}{\omega^2 - \Omega^2} = \frac{r}{\Omega m - k/\Omega}. \quad (14.74)$$

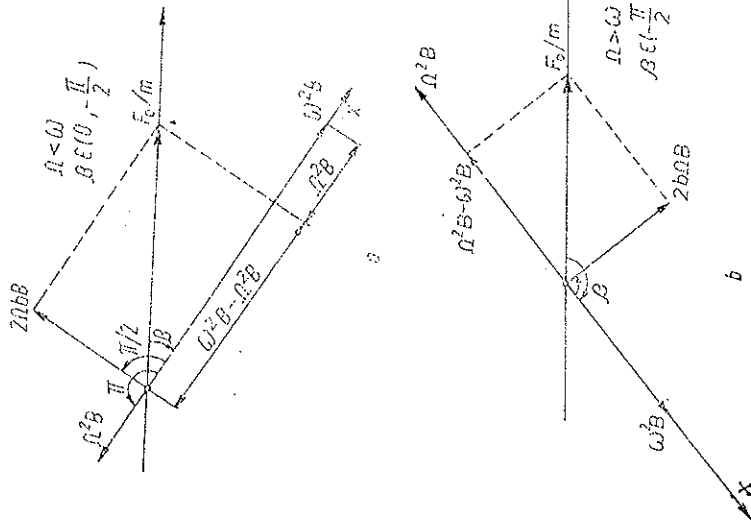


Fig. 14.19

Din (14.76) rezultă soluția reală:

$$x = \operatorname{Re}\{B e^{i(\Omega t + \beta)}\} = B \cos(\Omega t + \beta) =$$

$$= \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\Omega^2 b^2}} \cos(\Omega t + \beta), \quad (14.77)$$

$$x = \frac{F_0}{\Omega\sqrt{r^2 + (\Omega m - k/\Omega)^2}} \cos\left(\Omega t + \arctg \frac{r}{\Omega m - k/\Omega}\right).$$

Soluția generală completă va fi dată de suprapunerea oscilațiilor proprii cu oscilațiile forțate:

$$x = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \alpha) + B \cos(\Omega t + \beta). \quad (14.78)$$

Regimul tranzitoriu se termină după un timp suficient de lung (ca ordin de mărime după timpul de relaxare $\tau = 1/b$), când primul termen care dă oscilațiile proprii devine neglijabil.

După stingerea oscilațiilor proprii amortizate rămâne regimul permanent. Ne vom ocupa mai jos de *oscilațiile forțate*.

Viteza particulei este

$$v = \dot{x} = -\Omega B \sin(\Omega t + \beta) = \Omega B \cos(\Omega t + \beta + \pi/2), \quad (14.79)$$

$$v_0 = \Omega B = \frac{\Omega F_0}{m \sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\Omega^2 \beta^2}} = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega^2/\Omega - \Omega)^2 + 4\beta^2}} = \frac{F_0}{\sqrt{r^2 + (\Omega m - k/\Omega)^2}}. \quad (14.80)$$

Trebuie subliniat faptul că:

— frecvența oscilațiilor forțate este egală cu frecvența forței exterioare; — amplitudinea și defazajul oscilațiilor forțate depind de structura sistemului oscilant (k, m) și de frecvența forței exterioare, și nu depind de condițiile inițiale;

— oscilațiile forțate nu sînt amortizate, deși în sistem există forțe de frecare (care influențează *valoarea* amplitudinii oscilațiilor forțate).

d) **Analogia mecanico-electrică.** Prin analogie cu mărimile electrice, se definesc următoarele mărimi:

Rezistență mecanică (activă):

r — coeficientul de rezistență (real), $[r] = \text{kg/s}$.

Reactanțele mecanice:

$$X_m = \Omega m \text{ (inerțială)}, X_s = \frac{k}{\Omega} \text{ (elastică)}, [X] = \text{kg/s},$$

sau sub formă complexă:

$$\bar{X}_m = i\Omega m, \bar{X}_s = \frac{k}{i\Omega} = -i \frac{k}{\Omega}. \quad (14.81)$$

În care m este analogul mecanic al inductanței L și $1/k$ este analogul mecanic al capacității C .

Reactanța mecanică totală:

$$X = \Omega m - \frac{k}{\Omega}, \bar{X} = i \left(\Omega m - \frac{k}{\Omega} \right), X = |\bar{X}|. \quad (14.82)$$

Impedanța mecanică a oscilatorului amortizat este analogul impedanței unui circuit oscilant serie:

$$Z = \sqrt{r^2 + X^2} = \sqrt{r^2 + (X_m - X_s)^2} = \sqrt{r^2 + \left(\Omega m - \frac{k}{\Omega} \right)^2},$$

$$\bar{Z} = r + \bar{X} = r + i \left(\Omega m - \frac{k}{\Omega} \right) = \frac{m}{\Omega} [2\Omega b + i(\Omega^2 - \omega^2)], \quad (14.83)$$

$$Z = |\bar{Z}| = \frac{m}{\Omega} \sqrt{4\Omega^2 \beta^2 + (\Omega^2 - \omega^2)^2}; \quad [Z] = \text{kg/s}.$$

Cu noile notații putem scrie:

$$B = \frac{F_0}{\Omega Z}, \quad \text{tg } \beta = \frac{r}{X_m - X_s} = \frac{r}{X_m - X_s}, \quad v = \frac{F_0}{Z}. \quad (14.84)$$

Viteza este analogul intensității curentului electric, elongația x analogul sarcinii electrice (proporțională cu tensiunea la bornele condensatorului), iar forța este analogul tensiunii electrice.

Analogia mecanico-electrică

Mărimi mecanice	Mărimi electrice
forța F , [N]	tensiunea U , [V]
viteza v , [m/s]	intensitatea curentului i , [A]
elongația x , [m]	sarcina electrică q , [C]
rezistența r , [kg/s]	rezistența R , [Ω]
masa m , [kg]	inductanța L , [H]
constanta elastică k , [N/m]	inversul capacității $1/C$, [1/F]
reactanța inerțială Ωm , [kg/s]	reactanța inductivă ωL , [Ω]
reactanța elastică k/Ω , [kg/s]	reactanța capacitivă $1/\omega C$, [Ω]
impedanța $\bar{Z} = r + i(\Omega m - k/\Omega)$, [kg/s]	impedanța $\bar{Z} = R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$, [Ω]
$Z = \bar{Z} = \sqrt{r^2 + (\Omega m - k/\Omega)^2}$, [kg/s]	$Z = \bar{Z} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$, [Ω]
$B = \frac{F_0}{\Omega Z}$, [m]	$q_m = \frac{U_m}{\omega Z}$, [C]
$v_0 = \frac{F_0}{Z}$, [m/s]	$I_m = \frac{U_m}{Z}$, [A]
defazajul β dintre x și F	defazajul $= -\varphi = \frac{\pi}{2}$ dintre q și U
defazajul $\beta + \frac{\pi}{2}$ dintre v și F	defazajul $= -\varphi$ dintre I și U
$\text{tg } \beta = \frac{r}{\Omega m - k/\Omega}$	$\text{tg } \varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$
$P = \frac{1}{2} F_0 \cdot \Omega B \cos \left(\beta + \frac{\pi}{2} \right)$, [W]	$P = UI \cos \varphi$, [W]

14.7. REZONANȚA

a) Atunci cînd frecvența forței exterioare Ω variază, amplitudinea B a oscilațiilor forțate variază (fig. 14.20). Maximul amplitudinii B are loc pentru frecvența care face minimă cantitatea de sub radical (anulăm derivata în raport cu Ω^2):

$$-2(\omega^2 - \Omega^2) + 4\beta^2 = 0 \rightarrow \Omega = \omega_{res} = \sqrt{\omega^2 - 2\beta^2} = \sqrt{k/m - r^2/2m^2} < \omega', \text{ dacă } b < \omega/2 \text{ sau } r < \sqrt{2mk}. \quad (14.85)$$

Pentru această frecvență are loc *rezonanța elongațiilor* (fig. 14.20):

$$B_{\max} = \frac{F_0}{2m\omega'b} = \frac{F_0}{r\omega'} = \frac{F_0}{r\sqrt{\omega'^2 - b^2}} \quad (14.86)$$

Curbele din fig. 14.20 se numesc *curbe de rezonanță*, cu cât maximumul este mai înalt și curba mai îngustă, cu atât rezonanța este mai „ascuțită”. Este interesant de comparat această amplitudine de rezonanță cu elongația statică produsă de forța F_0 :

$$B_{\text{stat}} = \frac{F_0}{k} = \frac{F_0}{m\omega^2}$$

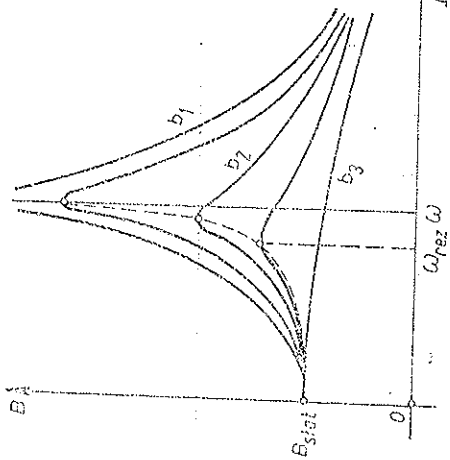


Fig. 14.20

Pentru amortizări mici, $b \ll \omega$, rezultă o creștere mare a amplitudinii:

$$b/\omega \ll 1, \quad \frac{B_{\max}}{B_{\text{stat}}} \approx \frac{\omega}{2b} = \frac{\sqrt{mk}}{r} \gg 1, \quad (14.89)$$

uneori sistemul se poate chiar distruge la rezonanță.

Ecuatia curbei pe care se situează amplitudinile maxime se obține eliminând coeficientul de amortizare b din (14.85—86):

$$B = \frac{F_0}{m\sqrt{\omega^4 - \Omega^4}} = \frac{F_0}{\sqrt{k^2 - m^2\Omega^4}} \quad (14.90)$$

b) După cum se vede din (14.80), maximumul amplitudinii vitezei, adică *rezonanța vitezelor*, are loc pentru frecvența:

$$\Omega = \omega = \sqrt{k/m} \text{ când } \dot{X} = \Omega m - k/\Omega = 0,$$

$$v_{0\max} = (\Omega \dot{X})_{\max} = \frac{F_0}{2mb} = \frac{F_0}{r} \quad (14.91)$$

În acest caz amplitudinea B nu este însă maximă:

$$B_0 = \frac{F_0}{2m\omega b} = \frac{F_0}{r\omega} < B_{\max} = \frac{F_0}{r\omega'}, \quad (\omega' < \omega). \quad (14.92)$$

Prin urmare, trebuie să distingem *rezonanța elongațiilor*, când *amplitudinea* este maximă la frecvența

$$\omega_{\text{rez}} = \sqrt{\omega^2 - 2b^2} < \omega' = \sqrt{\omega^2 - b^2} < \omega, \quad (14.93)$$

mai mică decât frecvența oscilațiilor libere, și *rezonanța vitezelor* când amplitudinea *vitezei* este maximă la frecvența $\Omega = \omega$, egală cu frecvența oscilațiilor proprii în absența amortizării.

Dacă coeficientul de amortizare b este foarte mic, $b \ll \omega$, atunci cele două rezonanțe practic coincid și au loc pentru frecvența $\Omega \approx \omega$, maximum amplitudinii la rezonanță va fi foarte mare și curba de rezonanță va fi foarte ascuțită (pentru $b \rightarrow 0$, $B_{\max} \rightarrow \infty$). Pentru amortizări mari, $b > \omega/\sqrt{2}$ sau $r > \sqrt{2mb}$, nu există o rezonanță a elongațiilor, curba amplitudinii B scade monoton cu frecvența Ω , dar există o rezonanță a vitezelor.

Din (14.73) se vede că oscilațiile totdeauna înfrize față de forța exterioră ($\beta < 0$). Când trecem prin rezonanța vitezelor ($\Omega = \omega$), defazajul β devine $\beta = -\pi/2$, și conform lui (14.79) *viteza va fi atunci în fază cu forța exterioră*. Puterea efectuată de forță în acest caz va fi tot timpul pozitivă: $P = Fv > 0$ și puterea medie va fi deci maximă. În adevăr, puterea medie pe o perioadă este

$$\bar{P} = Fv = F_0 \Omega B \cdot \cos \Omega t \cdot \cos(\Omega t + \beta + \pi/2) = \frac{1}{2} F_0 \Omega B \cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right), \quad (14.94)$$

de unde puterea maximă are loc pentru $\beta = -\pi/2$:

$$\bar{P}_{\max} = \frac{1}{2} F_0 \cdot \frac{F_0}{2mb} = \frac{F_0^2}{2r} \quad (14.95)$$

La rezonanța vitezelor ($\Omega = \omega$) forța acționează $F_0 \cos \Omega t = F_0 \cos \omega t$ este exact egală în modul și de sens opus cu forța de frecare (dissipativă) $-rv = -F_0 \cos \omega t$, care în rezonanța vitezelor devine, în adevăr, conform lui (14.79), (14.92), $-rv = -r\omega B_0 \cos \omega t = -F_0 \cos \omega t$.

c) Când $\Omega < \omega$, defazajul β dintre elongație și forță este în cadrulul IV (fig. 14.21); când $\Omega = \omega$, $\beta = -\pi/2$ (rezonanța vitezelor); când $\Omega > \omega$, $\beta < -\pi/2$ (trece din cadrulul IV în cadrulul III) și când $\Omega \rightarrow \infty$, $\beta \rightarrow -\pi$, adică la frecvențe foarte mari elongația este în opoziție de fază cu forța.

d) În apropierea rezonanței, când $|\Omega - \omega| \ll \omega$, și pentru amortizări mici $b \ll \omega$ (deci $B_{\max} \approx F_0/r\omega$), când curba de rezonanță este foarte ascuțită, putem

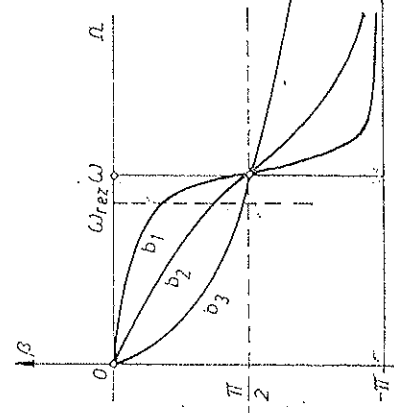


Fig. 14.21

scrie pentru amplitudine (aproximăm $\omega + \Omega = 2\omega + (\Omega - \omega) \approx 2\omega$ și $4\Omega^2 \approx 4\omega^2$):

$$B \approx \frac{F_0}{2m\omega \sqrt{(\omega - \Omega)^2 + b^2}} \approx \frac{B_{\max}}{\sqrt{1 + (\omega - \Omega)^2/b^2}} \quad (14.96)$$

În imediata vecinătate a rezonanței, anume pentru $|\Omega - \omega| \ll b$, (14.96) dă $B \approx B_{\max}$. Amplitudinea începe să scadă sensibil când $|\omega - \Omega| \sim b$, și anume, pentru $|\omega - \Omega| = b$ sau $\Omega = \omega \pm b$, amplitudinea devine $B_{\max}/\sqrt{2} = 0,707 B_{\max}$. Prin urmare, coeficientul de amortizare $b = r/2m$ caracterizează semilărgimea curbei de rezonanță (fig. 14.22).

Prin lărgimea curbei de rezonanță se înțelege intervalul de frecvențe $\Omega_2 - \Omega_1$, unde $\Omega_{1,2}$ sînt frecvențele unghiulare pentru care ordonata curbei de rezonanță se reduce la $1/\sqrt{2} = 0,707$ din maximumul curbei.

În cazul nostru (fig. 14.22):

$$2b = \Omega_2 - \Omega_1, \quad b = \frac{r}{2m} = \frac{1}{2} \Delta \Omega = \frac{1}{2} (\Omega_2 - \Omega_1). \quad (14.97)$$

În cazul reprezentării unei mărimi *energetice*, care este *pătratică* în amplitudine, lărgimea curbei trebuie luată la $1/2$ din maximumul curbei (pentru a obține coeficientul de amortizare).

Prin urmare, din graficul curbei de rezonanță $B = B(\Omega)$ (dacă această curbă este „ascuțită”, $b \ll \omega$, și nu „aplatizată”), luînd semilărgimea curbei, obținem coeficientul de amortizare $b = r/2m$.

Dacă amortizarea este mică ($b \ll \omega$), deci rezonanța este ascuțită, atunci înainte de rezonanță ($\Omega < \omega$) defazajul β este aproape zero, iar după rezonanță ($\Omega > \omega$) defazajul este aproape $-\pi$. În cazul ideal ($b \rightarrow 0$) defazajul β ar fi nul înainte de rezonanță (oscilațiile forțate în fază cu forța) și egal cu $-\pi$ după rezonanță (oscilațiile în opoziție de fază cu forța); pentru $\Omega = \omega$ defazajul ar avea un salt de la 0 la $-\pi$; frecările însă „lărgesc” acest salt.

Dacă amortizarea este mică, făcînd aceleași aproximații ca pentru amplitudinea B ($\omega + \Omega \approx 2\omega$), avem:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{-2\Omega b}{\omega^2 - \Omega^2} \approx \frac{b}{\Omega - \omega}. \quad (14.98)$$

Pentru $\Omega = \omega \mp b$, $\operatorname{tg} \beta = \mp 1$ sau $\beta = -\pi/4$, $-\pi/4$, prin urmare pe intervalul îngust de frecvențe ($\omega - b$, $\omega + b$) defazajul β variază cu $\pi/2$ tre-cînd de la $-\pi/4$ la $-\pi/4$ (fig. 14.23). Ducînd dreptele orizontale cu faza

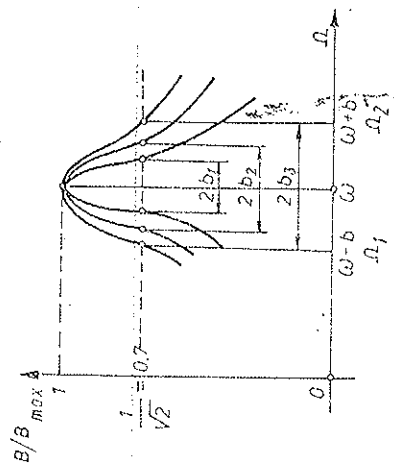


Fig. 14.22

$-\pi/4$, $-\pi/4$ și intersectîndu-le cu curba defazajului, obținem lărgimea $2b = r/m$, analog lărgimii curbei de rezonanță; pe intervalul îngust $2b$ defazajul β suferă o variație $\pi/2$ egală cu jumătate din toată variația sa.

e) Disiparea energiei.

În regimul permanent, cînd sistemul efectuează oscilații forțate (14.77), energia sa rămîne constantă, fiindcă sistemul absoarbe continuu energie, pe seama sursei forței exterioare, energie care este disipată prin intermediul frecărilor.

Să calculăm puterea medie disipată $P(\Omega)$. Conform lui (14.69), (14.79):

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= -\dot{E} = 2\dot{Q} = r\dot{v}^2 = \\ &= r\Omega^2 B^2 \sin^2(\Omega t + \beta) = \\ &= \frac{1}{2} r\Omega^2 B^2 = \frac{b\Omega^2 F_0^2}{m[(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\Omega^2 b^2]} = \frac{1}{2} \frac{rF_0^2}{r^2 + (\Omega m - b/\Omega)^2}. \end{aligned} \quad (14.99)$$

Bineînțeles, aceasta este identică cu puterea medie (14.94) dezvoltată de forța activă.

În vecinătatea rezonanței (în cazul amortizărilor mici), să facem în (14.99) aceeași aproximație ca în (14.96):

$$P(\Omega) \approx \frac{F_0^2}{4m} \frac{b}{(\Omega - \omega)^2 + b^2} = \frac{F_0^2}{2r} \frac{1}{1 + (\Omega - \omega)^2/b^2}. \quad (14.100)$$

Ultima formulă ne dă puterea absorbită de către sistemul oscilant (egală cu cea disipată) în vecinătatea rezonanței, în cazul sistemelor ascuțite.

Curba este simetrică față de frecvența de rezonanță $\Omega \approx \omega$ (fig. 14.24). Forma (14.100) a relației dintre puterea absorbită și frecvență se numește *dispersivă*.

La rezonanță, pentru $\Omega = \omega$, puterea absorbită este maximă:

$$P_{\max} = P(\omega) = \frac{F_0^2}{2r}, \quad (14.101)$$

ceea ce coincide, bineînțeles, cu (14.95).

Pentru $|\Omega - \omega| = b$, adică $\Omega = \omega \pm b$, puterea absorbită sau

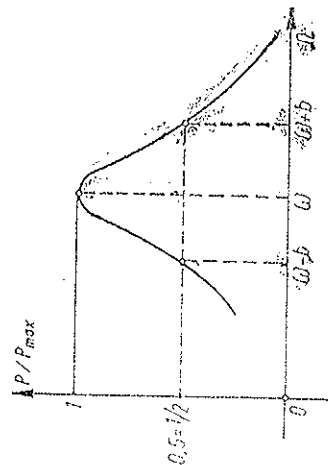


Fig. 14.24

disipată se reduce la jumătate, prin urmare $2b$ dă lărgimea curbei sau altfel, semilărgimea curbei puteri este egală cu coeficientul de amortizare b . Cu cât amortizarea este mai mică, cu atât maximul (14.100) este mai înalt și curba mai îngustă, adică rezonanța este mai „ascuțită”, dar aria mărginită de curbă este aceeași.

În adevăr, această arie este dată de integrala $\int_0^\infty P(\Omega) d\Omega$. Deoarece $P(\Omega)$ descrește repede odată cu „dezacordul” $(\Omega - \omega)$, putem face aproximațiile:

$$\int_0^\infty P(\Omega) d\Omega \approx \int_0^\infty \frac{F_0^2}{2r} \frac{d\Omega}{1 + (\Omega - \omega)^2/b^2} = \frac{F_0^2}{4m} \int_{-\infty}^\infty \frac{dz}{1 + z^2} \approx \frac{\pi F_0^2}{4m}, \quad (14.102)$$

unde limita inferioară $-\omega/b \ll -1$ și de aceea putem lua aproximativ $\arctg z \Big|_{-\infty}^\infty = \pi$.

14.8. OSCILAȚIILE SISTEMELOR CU MAI MULTE GRADE DE LIBERTATE

Numărul *gradelor de libertate* ale unui sistem este numărul coordonatelor (parametrilor) independente necesare pentru descrierea mișcării sistemului.

Fie s numărul gradelor de libertate, x_i — coordonatele, măsurate de la valorile lor de *echilibru* ($i = 1, 2, \dots, s$). Energia potențială, măsurată de la valoarea sa minimă de echilibru, analog cazului unidimensional, este o funcție *pătratică* în coordonatele x_i :

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,j} k_{ij} x_i x_j, \quad (k_{ij} = k_{ji}). \quad (14.103)$$

iar energia cINETICĂ — o funcție *pătratică pozitiv definită* în vitezele \dot{x}_i :

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{i,j} m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j \geq 0, \quad (m_{ij} = m_{ji}). \quad (14.104)$$

Există un sistem de coordonate, numite *normale* (sau principale), în care ambele forme pătratice (14.103—104) se aduc *simultan* la forme *diagonale*:

$$q_i = \sum_k c_{ik} x_k, \quad i = 1, 2, \dots, s, \\ E_c = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{q}_i^2, \quad U = \frac{1}{2} \sum_i k_i q_i^2, \quad (14.105)$$

astfel încât energia totală se scrie ca o sumă a energiilor de tip (14.9) ale unor oscilatori liniari, *independenți*, care efectuează oscilații simple, armonice, numite *oscilații normale*, cu frecvențele *proprii* ω_i :

$$E = \frac{1}{2} \sum m_i (\dot{q}_i^2 + \omega_i^2 q_i^2); \quad \ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (14.106)$$

Oscilația generală a sistemului va fi o anumită suprapunere a oscilațiilor normale.

Folosirea coordonatelor normale reduce astfel problema oscilațiilor unui sistem cu s grade de libertate, la problema oscilațiilor a s oscilatori liniari independenți.

Exemplu. Vom considera un sistem cu două grade de libertate și anume două pendule fi zice, identice, cuplate printr-un resort fin orizontal de constantă elastică k , fixat cu distanța h mai jos de punctele de suspensie ale pendulelor, ca în fig. 14.25. Coordonatele sistemului sînd cele două unghiuri de deviere θ_1, θ_2 măsurate de la pozițiile verticale, respective, de echilibru.

Vom considera oscilații *mici*. Atunci alungirea resortului l de cuplaj va fi $\approx h(\theta_2 - \theta_1)$, forța $kh(\theta_2 - \theta_1)$ și momentul ei față de axa de rotație $\pm kh^2(\theta_2 - \theta_1)$.

Ecuatiile mișcării de rotație (oscilație) a pendulelor se scriu (R_0 — distanța de la axa de suspensie la CM):

$$I\ddot{\theta}_1 = -mgR_0\theta_1 + kh^2(\theta_2 - \theta_1),$$

$$I\ddot{\theta}_2 = -mgR_0\theta_2 - kh^2(\theta_2 - \theta_1). \quad (14.107)$$

Introducînd notațiile:

$$\omega_0^2 = \frac{mgR_0}{I}, \quad \omega_c^2 = \frac{kh^2}{I}, \quad (14.108)$$

ecuațiile devin:

$$\ddot{\theta}_1 + \omega_0^2\theta_1 + \omega_c^2(\theta_1 - \theta_2) = 0, \quad \ddot{\theta}_2 + \omega_0^2\theta_2 + \omega_c^2(\theta_2 - \theta_1) = 0. \quad (14.109)$$

Frecvențele proprii pot fi găsite pe două căi. Întîi direct, căutînd soluții simple armonice ale sistemului (14.109), anume de forma:

$$\theta_{1,2} = A_{1,2} e^{i\omega t}, \quad (14.110)$$

care introduse în (14.109) dau, după simplificare cu factorul temporal $e^{i\omega t}$:

$$-\omega^2 A_1 + \omega_0^2 A_1 + \omega_c^2(A_1 - A_2) = 0, \quad (14.111)$$

$$-\omega^2 A_2 + \omega_0^2 A_2 + \omega_c^2(A_2 - A_1) = 0.$$

Acesta este un sistem algebric *omogen* în amplitudinile $A_{1,2}$ și pentru a avea soluții neidentice nule (nebanale) determinantul sistemului trebuie să fie nul:

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_c^2 & -\omega_c^2 \\ -\omega_c^2 & -\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_c^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (14.112)$$

Aceasta este o ecuație pătratică în ω^2 (numită *ecuație caracteristică*) cu rădăcinile:

$$\omega_1 = \omega_0, \quad \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\omega_0^2} \quad (14.113)$$

care constituie frecvențele oscilațiilor proprii.

Cea de-a doua cale este trecerea la coordonatele normale, adică separarea oscilațiilor independente. În cazul sistemului nostru (14.109) aceasta se face imediat prin adunarea și scăderea celor două ecuații:

$$(\theta_1 + \theta_2)'' + \omega_0^2(\theta_1 + \theta_2) = 0 \text{ deci } \omega_1 = \omega_0, \quad (14.114)$$

$$(\theta_1 - \theta_2)'' + (\omega_0^2 + 2\omega_0^2)(\theta_1 - \theta_2) = 0 \text{ deci } \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 2\omega_0^2},$$

coordonatele normale fiind $q_{1,2} = \theta_1 \pm \theta_2$.

Cele două oscilații normale se realizează devinând inițial pendulele cu același unghi, în același sens ($\omega_1 = \omega_0$ — oscilația simetrică), respectiv în sensuri opuse (ω_2 — oscilația antisimetrică). În primul caz resortul de cuplaj rămâne de fapt tot timpul nedeformat (și poate fi scos), iar în al doilea caz el este solicitat la maximum.

Oscilația generală va fi o suprapunere a celor două oscilații normale:

$$q_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1), \quad q_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2),$$

$$\theta_1 = \frac{1}{2}(q_1 + q_2), \quad \theta_2 = \frac{1}{2}(q_1 - q_2). \quad (14.115)$$

unde constantele $A_{1,2}$ și $\alpha_{1,2}$ se determină din condițiile inițiale. De exemplu, ținând în momentul inițial $t = 0$ primul pendul fix $\theta_1 = \theta_1 = 0$, iar al doilea deviat cu unghiul Θ , adică $\theta_2 = \Theta$, $\theta_2 = 0$, găsim soluția:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{1}{2}\Theta (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) = \\ &= \Theta \sin \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)t \cdot \sin \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t, \end{aligned} \quad (14.116)$$

$$\theta_2 = \frac{1}{2}\Theta (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = \Theta \cos \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)t \cdot \cos \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t.$$

De aici se vede că dacă frecvențele proprii $\omega_{1,2}$ sînt apropiate între ele (cuplaj slab):

$$\omega_0 \ll \omega_0 \text{ sau } \hbar b^2 \ll mgR_0, \text{ atunci } \omega_2 \cong \omega_0 + \frac{\omega_0^2}{\omega_0}, \quad (14.117)$$

obținem *fenomenul bășilor*, adică oscilații de tip sinusoidal de frecvență $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$, modulate, adică cu amplitudine *lent* variabilă cu frecvența (bătăilor):

$$\omega_b = \omega_2 - \omega_1 \cong \frac{\omega_0^2}{\omega_0}. \quad (14.118)$$

Pe măsură ce amplitudinea oscilațiilor pendulului 2 scade spre zero, amplitudinea oscilațiilor pendulului 1 crește spre un maximum, apoi procesul se desfășoară în sens invers. Energia cinetică trece succesiv de la un pendul la celălalt, ele fiind în rezonanță (pendulele pot fi puse în oscilație și în plane perpendiculare pe planul figurii 14.25).

14.9. ANALIZA ARMONICĂ (FOURIER)

a) Funcțiile *periodice*, în condiții foarte generale (condițiile lui Dirichlet), pot fi descompuse într-o serie trigonometrică de forma:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \alpha_n), \quad (14.119)$$

$$A_n^2 = a_n^2 + b_n^2, \quad \operatorname{tg} \alpha_n = -\frac{b_n}{a_n}, \quad (14.120)$$

unde coeficienții a_n, b_n se obțin ușor înmulțind această dezvoltare cu $\cos k\omega t$, respectiv $\sin k\omega t$ și integrând pe o perioadă $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

În adevăr, ținând seama că

$$\begin{aligned} \int_0^T \cos n\omega t \cdot \sin k\omega t \cdot dt &= 0; \quad \int_0^T \cos n\omega t \cdot \cos k\omega t \cdot dt = \delta_{nk} \frac{T}{2}, \quad (14.121) \\ \int_0^T \sin n\omega t \cdot \sin k\omega t \cdot dt &= \delta_{nk} \frac{T}{2}, \end{aligned}$$

$$\delta_{nk} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n \neq k \\ 1, & \text{dacă } n = k \end{cases} \quad (\text{simbolul lui Kronecker}), \quad (14.122)$$

rezultă formulele pentru coeficienți:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \bar{f} \quad (\text{valoarea medie a funcției}), \quad (14.123)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t dt, \quad n \neq 0.$$

Folosind formulele lui Euler (14.24), dezvoltarea Fourier (14.119) se poate scrie cu ajutorul funcțiilor exponențiale:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}, \quad c_n = \frac{1}{T} (a_n - ib_n), \quad (14.124)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt, \quad c_{-n} = c_n^*, \quad (14.125)$$

Prin urmare, oscilațiile *periodice* care se descompun în oscilații armonice, sinusoidale, cu frecvențe egale cu multipli întregi ai frecvenței fundamentale $\omega = \frac{2\pi}{T}$, unde T este perioada oscilației. *Spectrul oscilației*

este dat de diagrama în care sînt reprezentate amplitudinile în funcție de frecvență. El este format din linii verticale echidistante de diferite înălțimi (proporționale cu amplitudinile).

Descompunerea oscilațiilor în oscilații sinusoidale este importantă de exemplu în acustică la analiza sunetelor sau în electrodinamică.

b) Dacă oscilația este *a periodică*, atunci în locul seriei Fourier cu spectru de linii (discret), vor apărea oscilațiile sinusoidale cu frecvențele cuprinse într-un întreg interval, deci cu spectru *continuu*. Seria Fourier trece în integrala Fourier:

$$f(t) = \int_0^{\infty} a(\omega) \cos[\omega t + \alpha(\omega)] d\omega = \int_0^{\infty} a_{\omega} \cos(\omega t + \alpha_{\omega}) d\omega \quad (14.126)$$

sau sub formă complexă

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad c(-\omega) = c^*(\omega), \quad (14.127)$$

unde *densitatea de amplitudine* sau *densitatea spectrală* („anvelopa spectrului”) este

$$c(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (14.128)$$

Spectrul este reprezentat de graficul densității de amplitudine $a(\omega)$ (densitatea spectrală).

De exemplu, oscilația amortizată din fig. 14.26 are spectrul continuu din fig. 14.27.

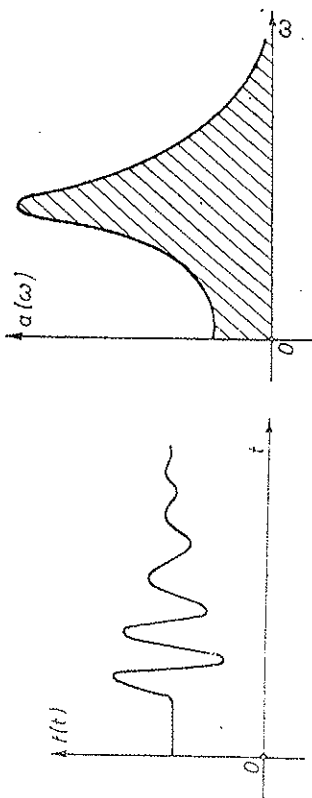


Fig. 14.26

Integrala Fourier devine mai simplă în cazul unei funcții *pare*:

$$f(t) = \int_0^{\infty} a_{\omega} \cos \omega t d\omega, \quad a_{\omega} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt \quad (14.129)$$

și în cazul unei funcții *impare*:

$$f(t) = \int_0^{\infty} b_{\omega} \sin \omega t d\omega, \quad b_{\omega} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt. \quad (14.130)$$

Exemple. 1. Oscilațiile dreptunghiulare din fig. 14.28 fiind simetrice față de SC ales, vor conține numai cosinusi:

$$a_0 = \frac{h\tau}{T}, \quad a_n = \frac{h\omega\tau}{2\pi} \sin \frac{\pi n\tau}{T} = \frac{2h}{\pi n} \sin \frac{\pi n\tau}{2T} \sin \frac{\pi n\omega\tau}{2}; \quad b_n = 0; \quad (14.131)$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{h}{\pi n} \sin \frac{\pi n\omega\tau}{2} \cdot e^{i n \omega t} =$$

$$= \frac{h\tau}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2h}{\pi n} \sin \frac{\pi n\tau}{T} \cdot \cos \frac{2\pi n t}{T}. \quad (14.132)$$

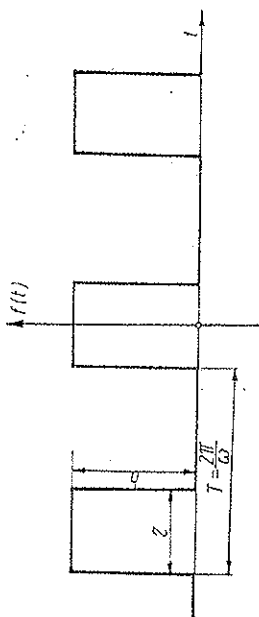


Fig. 14.28

Spectrul este reprezentat în fig. 14.29.

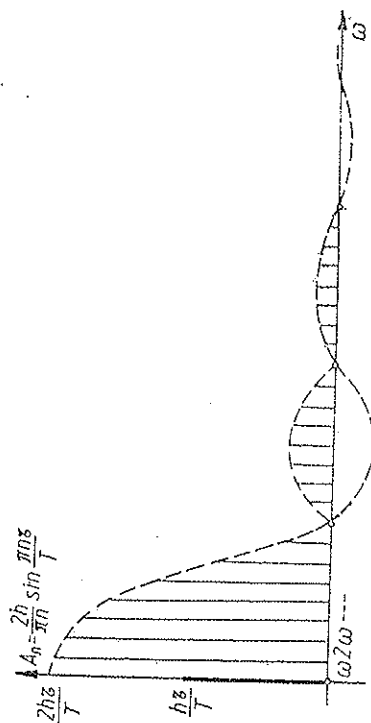


Fig. 14.29

2. Mișcarea aperiodică $f(t) = A e^{-\beta t}$, $t \geq 0$, (fig. 14.30), se descompune în integrala Fourier:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) e^{i\omega t} dt, \quad c(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{A}{b \pm i\omega} \quad (14.133)$$

sau

$$f(t) = \int_0^{\infty} a_{\omega} \cos(\omega t \pm \alpha_{\omega}) d\omega, \quad (14.134)$$

$$a_{\omega} = 2|c(\omega)| = \frac{1}{\pi} \frac{A}{\sqrt{b^2 + \omega^2}}, \quad \alpha_{\omega} = -\arg c(\omega) = \arctg \frac{\omega}{b}. \quad (14.135)$$

Spectrul este dat de a_{ω} și este reprezentat în fig. 14.31.

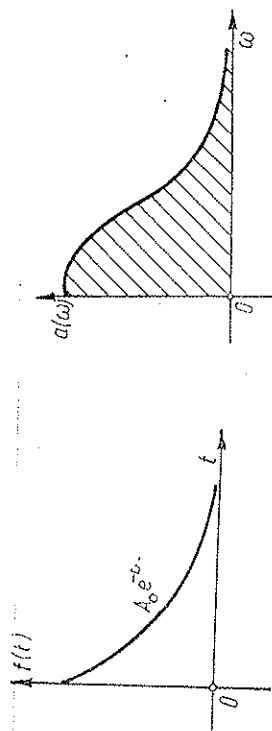


Fig. 14.30

Fig. 14.31

c) Dacă asupra sistemului oscilant acționează o forță oarecare $F(t)$ periodică sau nu, atunci descompunând-o în serie sau integrală Fourier, calculăm oscilațiile forțate produse *separat* de fiecare oscilație sinusoidală componentă. Deoarece ecuația diferențială a oscilațiilor amortizate este *liniară*, suma soluțiilor individuale este de asemenea o soluție (principiul suprapunerii). Rezultatul va fi deci suprapunerea (suma) oscilațiilor forțate individuale. Prin urmare, oscilația forțată rezultată va fi reprezentată de seria (sau integrala) Fourier corespunzătoare.

De exemplu,

$$F(t) = \sum A_n \cos(n\Omega t + \alpha_n); \quad x = \sum B_n \cos(n\Omega t + \beta_n), \quad (14.136)$$

unde

$$B_n = \frac{A_n}{n\Omega \sqrt{r^2 + (n\Omega m - k/n\Omega)^2}} \cdot \operatorname{tg}(\beta_n - \alpha_n) = \frac{r}{n\Omega m - k/n\Omega}. \quad (14.137)$$

Dacă una din frecvențele componente $n\Omega$ coincide sau este foarte apropiată de frecvența de rezonanță ω_{rez} a sistemului oscilant, acesta intră în rezonanță, și dacă amortizarea sa este mică, rezonanța va fi foarte ascuțită. Astfel se explică faptul că putem obține rezonanță cu ajutorul unor impulsuri (de formă oarecare) dar cu frecvența de repetiție egală cu un submultiplicu întreg al frecvenței de rezonanță.

Dacă avem un set de rezonatori cu amortizări foarte mici, atunci vor intra în rezonanță acei rezonatori ale căror frecvențe proprii de rezonanță coincid cu frecvențele componente ale oscilațiilor aplicate. Astfel se poate face analiza oscilațiilor (de exemplu, frecvențimetrul cu lamele rezonante folosit pentru curentul alternativ industrial).

PROBLEME

1. O particulă se mișcă de-a lungul axei Ox după legea $x = C \cos^2(\omega t + \alpha)$. Să se afle amplitudinea și perioada oscilațiilor. Care este ecuația „traectoriei” în spațiul fazelor (v, x) .

R. $A = C/2, \quad T = \pi/\omega; \quad v^2 = 4\omega^2 x(C - x).$

2. Un pendul simplu gravitațional a cărui bilă are densitate ρ este cufundat într-un lichid de densitate ρ_0 . Care este perioada micilor oscilații?

R. $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \frac{\rho}{\rho - \rho_0}}.$

3. De capătul unui resort vertical de constantă elastică k este fixat un corp de masă m . Cu ce distanță maximă coboară corpul lăsat liber, dacă în momentul inițial viteza lui este zero și resortul nu este întins.

R. $x_m = 2mg/k.$

4. Un corp de masă m este suspendat de un fir perfect flexibil și perfect elastic de constantă elastică k . Corpul este deplasat în jos și lăsat apoi liber să oscileze pe verticală. Care este deplasarea maximă admisibilă pentru ca oscilațiile să fie armonice?

R. $A_{\max} = mg/k.$

5. Un areometru (sau densimetru) de masă m și cu diametrul tubului cilindric vertical d efectuează mici oscilații verticale cu perioada T într-un lichid. Care este densitatea lichidului?

R. $\rho = \frac{16\pi m}{g T^2 d^2}.$

6. Un corp de masă m este suspendat de un resort. O particulă de masă m' cade cu viteza v pe corpul m de care se lipsește. Alungirea statică produsă de particula m' este x_0 . Să se afle amplitudinea oscilațiilor sistemului $(m + m')$.

R. $A = x_0 \sqrt{1 + \frac{v^2 m'^2}{x_0 g(m + m')}}.$

7. Pe un platan de masă neglijabilă, atârnat de un resort, eade fără viteză inițială un corp de la înălțimea h deasupra platanului. Considerând că ciocnirea corpului cu platanul este plastică, să se afle amplitudinea oscilațiilor platanului. În echilibru același corp alungește resortul cu x_0 .

R. $A = x_0 \sqrt{1 + 2h/x_0}.$

8. În mijlocul unei corzi elastice orizontale de lungime l , întinsă cu forța constantă F este suspendat un corp de masă m . Să se afle perioada micilor sale oscilații.

R. $T = \pi \sqrt{ml/F}.$

9. O particulă oscilează de-a lungul axei Ox după legea $x = A \cos(\omega t + c)$. Să se calculeze densitatea de probabilitate $w(x)$, unde $w(x) dx$ este probabilitatea de-a găsi particula pe intervalul $(x, x + dx)$.

R. $w(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{A^2 - x^2}}.$

10. O scindură omogenă este așezată orizontal și transversal pe doi cilindri în rotație, ca în fig. 14.32. Distanța dintre axele cilindrilor este l , iar coeficientul de frecare la alunecare este μ . Să se arate că scindura va oscila sinusoidal și să se afle perioada.

R.
$$T = \pi \sqrt{\frac{2l}{\mu g}}.$$

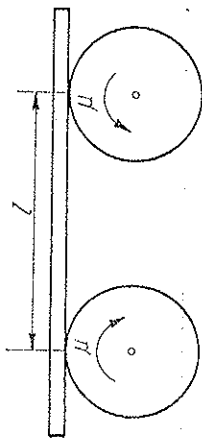


Fig. 14.32

11. Un manșon de masă m poate culisa fără frecare pe o tijă orizontală, fiind prins cu două resorturi identice, de constantă k , de pereții vasului din fig. 14.33. Să se calculeze perioada micilor oscilații ale manșonului, dacă vasul este rotit cu viteza unghiulară ω .

R.
$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{2k/m - \omega^2}}.$$

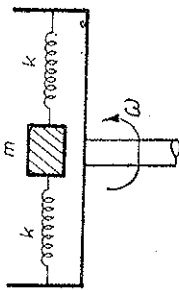


Fig. 14.33

12. Un corp de masă m , așezat pe o masă netedă, este legat printr-un resort orizontal de masă m' și constantă k de un perete. Să se afle frecvența oscilațiilor corpului (se neglijează frecările și se consideră că toate punctele resortului oscilează în fază).

R.
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m + m'/3}}.$$

13. De capetele unui resort cu constanta elastică k sînt prinse două bile de mase m_1, m_2 . Neglijînd forțele gravitaționale, să se afle frecvența de oscilație a resortului, inițial întins (sau comprimat) și apoi lăsat liber.

R.
$$\omega = \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}}.$$

14. La capetele unei tije fine orizontale cu constanta de torsiune C sînt fixate două discuri cu momentele de inerție I_1, I_2 . Căci este perioada oscilațiilor de torsiune ale sistemului.

R.
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_1 I_2}{C(I_1 + I_2)}}.$$

15. Un pendul este format dintr-o tijă subțire rigidă avînd la capăt o sferă de rază R cu pereții foarte subțiri, conținînd un lichid ideal. Distanța de la axa de suspenzie pînă la centrul sferei este l (fig. 14.34). De cite ori crește perioada micilor oscilații dacă lichidul îngheață (neglijînd variația de volum prin solidificare).

R.
$$T'/T = \sqrt{1 + \frac{2R^2}{5l^2}}.$$

16. O tijă omogenă de masă m și lungime l poate oscila într-un plan vertical, avînd însă capătul inferior prins la mijlocul unui resort orizontal de constantă elastică k (fig. 14.35). Să se afle frecvența micilor oscilații.

R.
$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2l} \left(1 + \frac{3kl}{mg}\right)}.$$

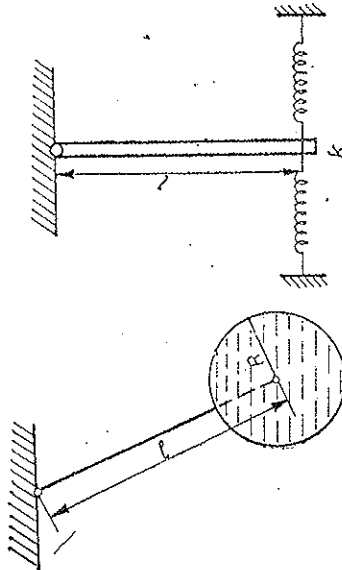


Fig. 14.34

Fig. 14.35

17. Un cilindru omogen de masă m execută mici oscilații de rostogolire fără alunecare pe un plan orizontal, fiind prins la periferie de mijlocul unui resort orizontal de constantă elastică k , ca în fig. 14.36. Care este perioada oscilațiilor?

R.
$$T = \pi \sqrt{\frac{3m}{2k}}.$$

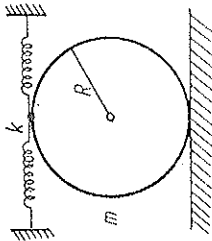


Fig. 14.36

18. Un pendul fizic este rotit cu 180° față de poziția sa verticală de echilibru și lăsat liber. Știînd că el trece prin poziția verticală de echilibru cu viteza unghiulară ω , să se afle perioada micilor oscilații ale pendulului.

R.
$$T = \frac{4\pi}{\omega}.$$

19. Un pendul fizic oscilează cu frecvența ω_1 . Dacă i se atașează un corp mic de masă m la distanța h de axa de suspenzie, frecvența devine ω_2 . Care este momentul de inerție al pendulului fizic față de axa de rotație?

R.
$$I = mk^2 \frac{\omega_2^2 - g/k}{\omega_1^2 - \omega_2^2}.$$

20. Două pendule fizice au perioadele T_1, T_2 și momentele de inerție I_1, I_2 față de axa de oscilație. Dacă le cuplăm rigid, ce perioadă va avea pendulul fizic rezultat, în jurul aceleiași axe de suspenzie

R.
$$T = T_1 T_2 \sqrt{\frac{I_1 + I_2}{I_1 T_2^2 + I_2 T_1^2}}.$$

21. La capătul liber al unei bare orizontale (de masă neglijabilă), încastrată la celălalt capăt, este atârnat printr-un fir un corp de masă m . Bara are lungimea l , momentul geometric J și modulul de elasticitate E . Care va fi perioada oscilațiilor corpului? Pentru ce amplitudine a oscilațiilor firul de suspenzie va începe să se strângă?

R. $T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{3EJ}}$; $A > \frac{mg l^3}{3EJ}$.

22. La mijlocul unei bare orizontale (de masă neglijabilă), sprijinită orizontal la capete pe două reazeme, este așezat un corp de masă m . Bara are lungimea l , momentul geometric J și modulul de elasticitate E . Care va fi perioada oscilațiilor corpului? Pentru ce amplitudine a oscilațiilor corpul începe să se desprindă de bară?

R. $T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{48EJ}}$, $A > \frac{mg l^3}{48EJ}$.

23. Să se afle amplitudinea inițială A_0 și faza inițială α a oscilațiilor amortizate, știind constantele m , k , r , precum și condițiile inițiale: poziția x_0 și viteza v_0 la $t = 0$.

R. $A_0 = \sqrt{x_0^2 + (v_0^2 + b^2)/\omega^2}$, $\alpha = \arccos \frac{x_0}{A_0}$.

24. Un pendul simplu gravitațional are lungimea l . Știind timpul de relaxare τ a oscilațiilor amortizate, să se calculeze decrementul logarithmic.

R. $D = \frac{2\pi}{\tau} \sqrt{\frac{l}{g}} \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{l}{g\tau^2}}}$.

25. Un pendul simplu gravitațional oscilează amortizat, decrementul logarithmic fiind D . Știind că după un timp τ energia mecanică a pendulului a scăzut de e ori, să se afle lungimea pendulului.

R. $l = \frac{4g\tau^2}{1 + 4\pi^2/D^2}$.

26. Un corp de masă m suspendat la capătul unui resort de constantă elastică k , efectuează oscilații verticale amortizate. Știind că după N_0 oscilații, amplitudinea oscilațiilor scade de e ori, să se afle decrementul logarithmic, perioada oscilațiilor amortizate, coeficientul de amortizare.

R. $D = \frac{1}{N_0}$, $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{4\pi^2 N_0^2}}}$, $b = \sqrt{\frac{k}{m} \cdot \frac{1}{1 + 4\pi^2 N_0^2}}$.

27. De câte ori trebuie să crească coeficientul de amortizare pentru ca oscilațiile pseudo-periodice cu decrementul D să treacă în mișcarea amortizată aperiodică?

R. $b/b = \sqrt{1 + 4\pi^2/D^2}$.

28. Să se scrie expresia vitezei oscilațiilor amortizate. De câte ori se micșorează după o perioadă viteza unui corp ce execută oscilații amortizate cu decrementul logarithmic D ?

R. $v = \frac{1}{\omega} A_0 e^{-b\psi/\cos(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2} + \arctg \frac{b}{\omega})}$; $\frac{v(t)}{v(t + T)} = e^{-D}$.

29. O particulă deplasată din poziția sa de echilibru cu A_0 este lăsată liberă. Ce distanță parcurge particula până la oprirea sa completă, știind decrementul logarithmic D ?

R. $s = A_0 \frac{1 + e^{-D/2}}{1 - e^{-D/2}}$.

30. Un corp de masă m , așezat pe un plan orizontal cu coeficientul de frecare la luncare μ , este legat printr-un resort orizontal nedeformat, de constantă k , de un perete. Corpul este deplasat astfel, încât resortul se lungeste cu A , apoi lăsat liber. Să se afle perioada oscilațiilor corpului și numărul de oscilații efectuate până la oprirea corpului.

R. $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$, $N = A \frac{k}{4\mu mg} - \frac{1}{4}$.

31. Să se calculeze raportul B_{\max}/B_{stat} cunoscând decrementul logarithmic D .

R. $\frac{B_{\max}}{B_{\text{stat}}} = \frac{\pi}{D} + \frac{D}{4\pi}$.

32. Amplitudinea oscilațiilor forțate este aceeași pentru două frecvențe $\Omega_{1,2}$. Să se afle frecvența de rezonanță a elongațiilor.

R. $\omega_{\text{rez}} = \sqrt{\frac{1}{2}(\Omega_1^2 + \Omega_2^2)}$.

33. O bilă de masă m alungește static un resort cu x_0 . Știind că bila efectuează oscilații verticale forțate pe resort, sub acțiunea unei forțe sinusoidale periodice de amplitudine F_0 cu decrementul logarithmic D , să se afle frecvența de rezonanță și amplitudinea la rezonanță (rezonanța elongațiilor).

R. $\omega_{\text{rez}} = \sqrt{\frac{g}{x_0} \frac{1 - D^2/4\pi^2}{1 + D^2/4\pi^2}}$, $B_{\max} = \frac{F_0 D x_0}{4\pi mg} \left(1 + \frac{4\pi^2}{D^2}\right)$.

34. Un pendul elastic are perioada oscilațiilor neamortizate T . Asupra corpului acționează o forță sinusoidală de amplitudine F_0 și o forță de frecare proporțională cu viteza. La rezonanța vitezelor amplitudinea oscilațiilor este B_0 . Să se afle coeficientul de rezistență și puterea medie disipată la rezonanța vitezelor.

R. $r = \frac{F_0 T}{2\pi B_0}$, $P_{\max} = \frac{\pi F_0 B_0}{T}$.

35. Pentru două frecvențe Ω_1, Ω_2 ale forței sinusoidale perturbatoare, amplitudinea vitezei se reduce la jumătate din valoarea maximă. Să se afle frecvența de rezonanță a vitezelor și coeficientul de amortizare.

R. $\omega = \sqrt{\Omega_1 \Omega_2}, \quad b = \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2\sqrt{3}}.$

36. Să se determine raportul $P(\Omega)$: P_{\max} la rezonanța elongațiilor, știind raportul ω/b .

R. $\frac{P(\omega_{rez})}{P_{\max}} = \frac{\omega^2/b^3 - 2}{\omega^2/b^2 - 1}.$

37. Să se dezvolte în serie trigonometrică oscilațiile triunghiulare din fig. 14.37.

R.
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4h}{\pi^2 n^2} \sin^2 \frac{n\omega\tau}{2} \cdot e^{in\omega t} =$$

$$= \frac{h\tau}{2T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2hT}{\pi^2 n^2} \sin^2 \frac{\pi n\tau}{2T} \cdot \cos n\omega t.$$

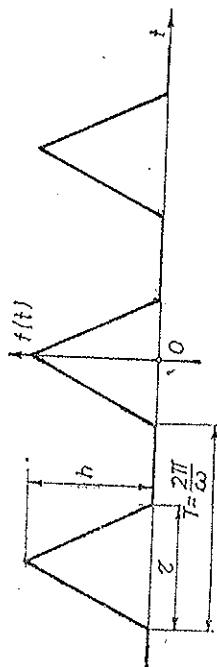


Fig. 14.37

38. Să se dezvolte în serie trigonometrică oscilațiile în „dinți de ferăstrău” din fig. 14.38.

R.
$$f(t) = \frac{h}{2} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{h}{2\pi n} e^{i(n\omega t + \pi/2)} = \frac{h}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h}{\pi n} \cdot \sin n\omega t.$$

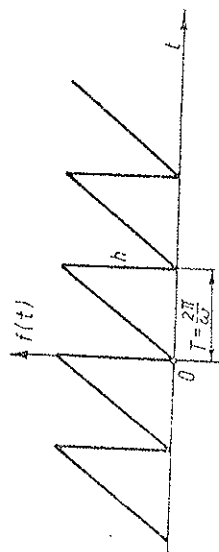


Fig. 14.38

39. Să se dezvolte în serie trigonometrică sinusoida „redresată” $f(t) = A|\sin \omega t|$ din fig. 14.39.

R.
$$A|\sin \omega t| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2A}{\pi} \frac{1}{1 - 4n^2} e^{i2n\omega t} = \frac{2A}{\pi} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4A}{\pi} \frac{1}{4n^2 - 1} \cdot \cos 2n\omega t.$$

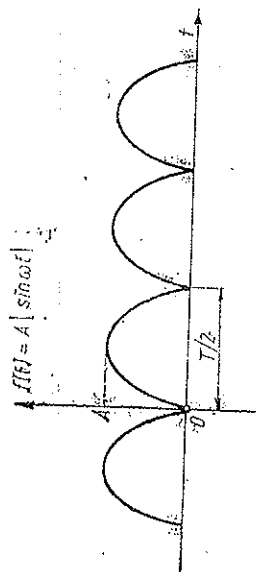


Fig. 14.39

40. Să se descompună în integrală Fourier oscilația amortizată aperiodică

$$f(t) = A e^{-b|t|}.$$

R.
$$a(\omega) = \frac{2}{\pi} A \frac{b}{b^2 + \omega^2}, \quad A e^{-b|t|} = \frac{2}{\pi} A b \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega t}{b^2 + \omega^2} d\omega.$$

UNDE ELASTICE

Mediile *continue*: gazele, lichidele, solidele, sînt sisteme de particule *îlegate*, adică de particule (molecule, atomi sau ioni) care interacționează între ele. De aceea, dacă una din particule oscilează, vor oscila după ea și particulele vecine; oscilațiile se vor propaga în mediu de la particulă la particulă sub formă de unde, numite *unde elastice* (spre deosebire, de exemplu, de undele electromagnetice în vid sau în substanță). Această *nelocalizabilitate* a oscilațiilor este caracteristică tuturor mediilor continue. Propagarea undei nu se face instantaneu, ci cu o viteză *finită* c .

15.1. UNDA PLANĂ PROGRESIVĂ NEATENUATĂ

Dacă toate particulele situate într-un plan perpendicular pe direcția de propagare a undei oscilează identic, unda se numește *plană*.

Fie o undă plană care se propagă *fără atenuare* în direcția axei Ox cu viteza constantă c . Dacă în originea $x = 0$ elongația ξ a particulei urmează o anumită lege:

$$\xi(0, t) = f(t), \quad (15.1)$$

atunci în oricare punct x de pe axa Ox elongația $\xi(x, t)$ a particulei de acolo, *măsurată de la poziția sa de echilibru*, va parcurge aceeași valori ca în origine, dar cu o anumită întârziere x/c , dată de timpul necesar undei ca să ajungă din origine pînă în punctul x considerat. Prin urmare, în punctul x la timpul t elongația trebuie să fie aceeași ca în origine în timpul $t - x/c$:

$$\xi(x, t) = \xi(0, t - x/c) = f(t - x/c) = F(x - ct). \quad (15.2)$$

Elongațiile $\xi(x, t)$ ale particulelor, măsurate de la pozițiile lor de echilibru x , pot fi afit în direcția de propagare a undei, atunci unda se numește *longitudinală*, cît și într-o direcție perpendiculară pe direcția de propagare, atunci unda se numește *transversală*. Mai general, ξ poate desemna și o mărime fizică ondulatorie oarecare, precum cîmpul electric sau magnetic într-o undă electromagnetică.

Expresia (15.2) reprezintă ecuația unei *unde plane progresive* care se propagă fără atenuare în sensul pozitiv al axei Ox cu viteza c . Pentru unda care se propagă în sensul invers al axei Ox , c trece în $-c$:

$$\xi(x, t) = f(t + x/c) = F(x + ct). \quad (15.3)$$

Particulele situate într-un plan perpendicular pe direcția de propagare a undei oscilează identic, de aceea unda se numește *plană*.

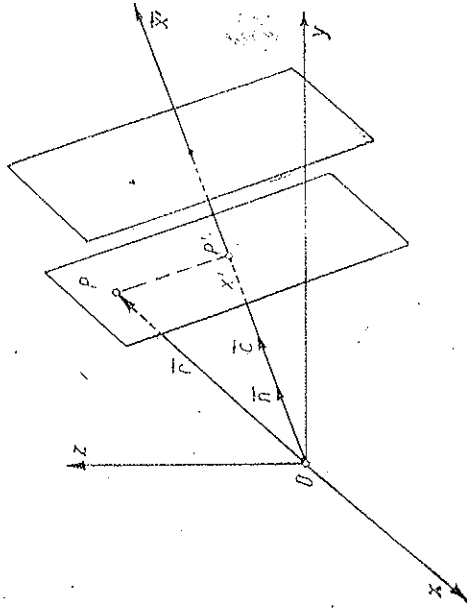


Fig. 15.1

Pentru unda plană *progresivă* este caracteristică dependența elongațiilor ξ de combinația $u = t \mp x/c$ (sau $x \mp ct$) și nu separat și independent de x și t . Dacă egalăm „faza” u cu o constantă, $x \mp ct = \text{const}$, găsim legea de propagare rectilinie uniformă $x = \pm ct + \text{const}$ a fazei (sau frontului) undei.

Dacă unda plană se propagă în direcția versorului \vec{n} (fig. 15.1), elongația particulei dintr-un punct P de rază vectorială \vec{r} va fi aceeași ca a particulei P' (x'), $x' = \vec{r} \cdot \vec{n}$:

$$\xi(\vec{r}, t) = \xi(x', t) = f\left(t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{c}\right). \quad (15.4)$$

15.2. UNDA PLANĂ MONOCROMATICĂ

În unda plană *monocromatică*, oscilațiile în fiecare punct sînt *armonice* (sinusoidale), de o anumită frecvență ω :

$$\begin{aligned} \xi(0, t) &= A \cos \omega t = f(t), \\ \xi(x, t) &= f(t - x/c) = A \cos \omega(t - x/c). \end{aligned} \quad (15.5)$$

Elongația ξ este nu numai periodică în timp, cu perioada $T = 2\pi/\omega$, ci periodică și în spațiu, în raport cu coordonata x , cu perioada λ , numită *lungimea de undă*, care rezultă din condiția de periodicitate spațială:

$$\cos \omega \left(t - \frac{x + \lambda}{c} \right) = \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \rightarrow \frac{\omega \lambda}{c} = 2\pi, \quad (15.6)$$

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = cT = \frac{c}{\nu}.$$

Lungimea de undă este egală cu distanța parcursă de undă în timpul unei perioade T , sau altfel spus, cu distanța dintre două maxime (minime sau anuri) succesive ale undei în spațiu la un moment dat.

Ecuatia undei (15.5) se mai poate scrie sub forma:

$$\xi = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) = A' \cos^2 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = A \cos (\omega t - kx), \quad (15.7)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{cT} = \frac{\omega}{c}, \quad (15.8)$$

unde k se numește *număr de undă*, egal cu numărul de unde care se cuprind în 2π unități de lungime. Mai general, se definește *vectorul de undă* \vec{k} având modulul $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$ și fiind orientat în direcția și sensul de propagare a undei:

$$\vec{k} \stackrel{\text{def}}{=} k\vec{n} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n} = \frac{\omega}{c} \vec{n}. \quad (15.9)$$

Atunci ecuația undei plane monocromatice care se propagă în spațiu în direcția și sensul vectorului de undă \vec{k} se scrie:

$$\xi = A \cos (\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) = \operatorname{Re} \{ A e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \}. \quad (15.10)$$

Argumentul cosinusului se numește *faza undei*:

$$\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}. \quad (15.11)$$

Suprafețele de undă sînt *suprafețele de fază constantă* și ele sînt *perpendiculare* (în medii izotrope) pe *direcția de propagare a undei*. În adevăr, ecuația $\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} = \text{const}$ reprezintă ecuația unui plan în fiecare moment, vectorul \vec{k} fiind perpendicular pe acest plan.

Normalele pe suprafețele de undă se numesc raze.

În cazul considerat mai sus, suprafețele de undă sînt plane, normale pe direcția de propagare.

Viteza undei plane monocromatice coincide cu viteza de deplasare a fazei, numită *viteza de fază*. Dacă faza din punctul x la momentul t a ajuns în punctul $x + dx$ la momentul $t + dt$, înseamnă că

$$\varphi = \omega t - kx = \omega(t + dt) - k(x + dx) \rightarrow d\varphi = \omega dt - k dx = 0, \quad (15.12)$$

$$v_f = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = c.$$

Importanța studiului undelor *plane monocromatice* (15.10) este deosebită, deoarece o undă oarecare poate fi descompusă totdeauna în unde plane monocromatice (descompunem, de exemplu, funcția $f(t)$ (15.1) în serie sau integrală Fourier), analog descompunerii unei oscilații oarecare în oscilații armonice sinusoidale.

Undele elastice se numesc și unde sonore sau sunete și se împart în 3 game: *infrasunete* cu frecvențe sub 16 Hz; *sunete auzibile* cu frecvențe între 16 Hz și 20 kHz (lungimi de undă în aer între 20 m și 2 cm) și *ultrasunete* cu frecvențe peste 20 kHz (pînă la ~ 10 GHz).

15.3. DEFORMAȚIA SOLIDELOR PRODUSĂ DE UNDE

Undele longitudinale se pot propaga atît în solide cît și în fluide, în timp ce undele transversale se pot propaga numai în solide, deoarece în fluide nu există forțe elastice la forfecare, adică forțe proporționale cu distanța de lungime care a unui strat față de altul, care să transmită oscilațiile transversale.

a) Să considerăm înfi o undă plană *longitudinală*. Din cauza deplasării particulelor în direcția propagării, mediul elastic este în fiecare moment deformat. Să calculăm *deformația relativă* $\varepsilon(x, t)$ în punctul (planul) $P(x)$ la momentul t . Pentru aceasta să considerăm un punct (plan) infinit apropiat $Q(x + dx)$ (fig. 15.2). Coordonatele $x, x + dx$ reprezintă pozițiile de *repaus* (de echilibru) ale particulelor, astfel încît $PQ = dx$ este lungimea nedeformată a stratului. La momentul t particula din $P(x)$ are elongația $\xi(x, t)$ și deci se

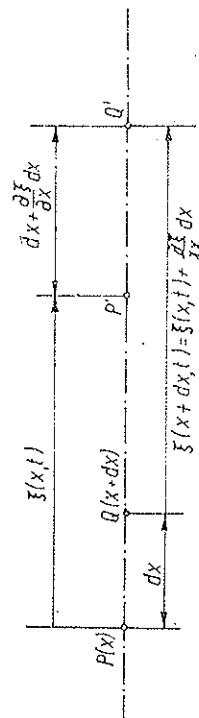


Fig. 15.2

află deplasată în $P(x + \xi)$, iar particula din $Q(x + dx)$ se află atunci deplasată în $Q'(x + dx + \xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx)$, deoarece elongația din punctul infinit

vecin $Q(x + dx)$ este $\xi(x + dx, t) = \xi(x, t) + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx$. Lungimea segmentu-

lui (strălucului) $PQ = dx$ devine deci la momentul t egală cu $P'Q' = dx + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx$. Alungirea absolută va fi $P'Q' - PQ = \frac{\partial \xi}{\partial x} dx$, de unde deformația relativă:

$$\varepsilon(x, t) = \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (15.13)$$

Cealaltă derivată parțială a elongației dă evident viteza particulei:

$$v(x, t) = \frac{\partial \xi}{\partial t}. \quad (15.14)$$

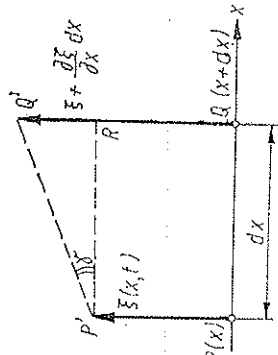


Fig. 15.3

b) În cazul propagării undei *transversale* în direcția axei Ox , particulele au deplasări $\xi(x, t)$ transversale (perpendiculare) pe direcția de propagare Ox . Două puncte înfinit vecine cu pozițiile de echilibru în $P(x)$, $Q(x + dx)$ se vor afla deplasate la momentele t în pozițiile $P'(x, \xi)$, respectiv $Q'(x + dx, \xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx)$ (fig. 15.3). Unghiul de lunecare (forfecare) γ al planului din Q față de planul din P , unghi considerat mic, rezultă din raportul catetelor $RQ' = \frac{\partial \xi}{\partial x} dx$ și $P'R = dx$, deci

$$\gamma(x, t) = \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (15.15)$$

Deformația elastică, de alungire sau de lunecare, este egală cu derivata parțială a elongației în raport cu coordonata.

c) Deformațiile produse de unda plană progresivă. În cazul undei *plane progresive neatenuate* (15.2) avem (v — viteza particulelor):

$$\xi(x, t) = f(t - x/c) = f(u), \text{ unde } u = t - x/c, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{c},$$

$$v = \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u},$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \left(-\frac{1}{c} \right) = -\frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial u} = -\frac{v}{c},$$

de unde deformația relativă sau unghiul de lunecare:

$$\varepsilon(x, t) \text{ sau } \gamma(x, t) = \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial u} = -\frac{v}{c}. \quad (15.16)$$

Deformația de alungire sau lunecare este egală cu raportul, cu semnul schimbat, dintre viteza particulei și viteza undei.

Pentru unda progresivă care se propagă în sensul invers (negativ) al axei Ox avem:

$$\varepsilon \text{ sau } \gamma = \frac{\partial \xi}{\partial x} = + \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{v}{c}. \quad (15.17)$$

Deformația $\varepsilon(x, t)$ sau $\gamma(x, t)$ este maximă acolo unde viteza particulelor $v(x, t)$ este maximă, deci în punctele unde particulele trec prin pozițiile lor de echilibru. Acolo unde viteza particulelor v este în același sens cu sensul de propagare al undei longitudinale avem o regiune de comprimare ($\varepsilon < 0$), iar acolo unde viteza particulelor este în sens opus avem o regiune de rarefiere ($\varepsilon > 0$).

În particular, în cazul undei *plane monocromatice* (15.7) avem:

$$\begin{aligned} \varepsilon(x, t) \text{ sau } \gamma(x, t) &= \frac{A\omega}{c} \sin \omega(t - x/c) = \frac{2\pi}{\lambda} A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = \\ &= Ak \sin(\omega t - kx). \end{aligned} \quad (15.18)$$

Deformațiile sînt nule acolo unde elongațiile sînt maxime și reciproc, sînt maxime acolo unde elongațiile sînt nule. Aceasta se vede ușor pe o undă transversală. În fig. 15.4 am reprezentat porțiuni egale din două plane vecine, în punctele de maxim și de zero ale elongațiilor. În maxime cele două plane vecine sînt egal deplasate transversal din pozițiile lor de echilibru și deformația de lunecare (a unui plan față de celălalt) este nulă; în schimb în punctele de zero, cele două plane vecine sînt deplasate în sensuri opuse și lunecarea este maximă.

La fel, într-o undă longitudinală, comprimările și rarefierele vor fi maxime în punctele de zero ale elongațiilor: acolo două plane vecine (de o parte și de cealaltă a punctului de zero) se apropie sau se depărtează între ele, pe cînd în punctele de maxim ele se mișcă la fel în același sens.

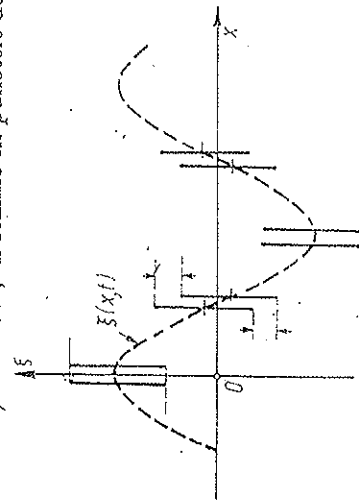


Fig. 15.4

Ca ordin de mărime pentru sunetele obișnuite:

$$\varepsilon_{max} \text{ sau } \gamma_{max} = \frac{A\omega}{c} = Ak = 2\pi \frac{A}{\lambda} \sim 2\pi \frac{10^{-2} \text{ mm}}{10^3 \text{ mm}} \approx 10^{-4} = 0,01\% \quad (15.19)$$

15.4. ECUAȚIA UNDELOR

Derivând încă o dată pe $\partial f / \partial x$, obținem ecuația undelor:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) = -\frac{1}{c} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} = \\ &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \text{ sau } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0 \text{ sau } \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) f = 0. \end{aligned} \quad (15.20)$$

Prin urmare, undele $\xi(x, t) = f(t \mp x/c)$ verifică această ecuație diferențială cu derivate parțiale, și reciproc, soluția generală a acestei ecuații este o supra-punere a celor două soluții, undele $f_1(t - x/c) + f_2(t + x/c)$.

În cazul propagării într-o direcție oarecare în spațiu, ecuația undelor se poate obține analog, pornind de la unda plană (15.4):

$$f\left(t - \frac{\vec{n}\vec{r}}{c}\right) = f(u), \quad u = t - \frac{\vec{n}\vec{r}}{c} = t - \frac{1}{c}(n_x x + n_y y + n_z z),$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u};$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\vec{n}\vec{r}}{c} \right) = -\frac{n_x}{c},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{n_x}{c} \frac{\partial f}{\partial u} = -\frac{n_x}{c} \frac{\partial f}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{n_x}{c} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} = -\frac{n_x}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{n_x^2}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

Sumând derivatele parțiale ($n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = n^2 = 1$), rezultă ecuația undelor (pentru medii omogene și izotrope):

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Delta f = \text{lap } f \quad (15.21)$$

(Δ este operatorul lui Laplace, pe scurt laplacean) sau

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) f = \square f = \text{dal } f = 0 \quad (15.22)$$

(\square este operatorul D'Alembertian). Pentru unda plană care se propagă în direcția axei Ox regăsim de aici ecuația (15.20).

Vom avea nevoie de ecuația undelor pentru calculul vitezei de propagare c , care apare la pătrat la numitorul derivatei după timp. Ecuația undelor se obține din ecuația fundamentală a dinamicii scrisă pentru un element $dm: dm \cdot a = dF$.

15.5. VITEZA UNDELOR ÎN SOLIDE

a) Să calculăm viteza undelor longitudinale într-o bară și într-un mediu elastic nemărginit. Legătura dintre tensiunea elastică $\sigma(x, t) = F/S_0$ și deformația longitudinală $\varepsilon(x, t)$ este dată de legea lui Hooke (12.1), respectiv (12.17):

$$\sigma(x, t) = \frac{1}{S_0} F(x, t) = E \varepsilon(x, t) = E \frac{\partial \xi}{\partial x}; \quad (15.23)$$

mediu elastic nemărginit:

$$\sigma(x, t) = E' \varepsilon = \frac{E'(1 - \mu)}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} \varepsilon, \quad (E' \approx 1,35 E). \quad (15.24)$$

Un strat infinit de subțire dx cu masa $dm = \rho_0 S_0 dx$ (ρ_0 — densitatea în absența undei) va fi supus la forța rezultantă $dF = \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx \cdot S_0$ (fig. 15.5).

Conform legii fundamentale a mecanicii:

$$dm \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = dF = \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx S_0, \quad \rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}. \quad (15.25)$$

Pentru bară:

$$\sigma = E \varepsilon = E \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} = E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad (15.26)$$

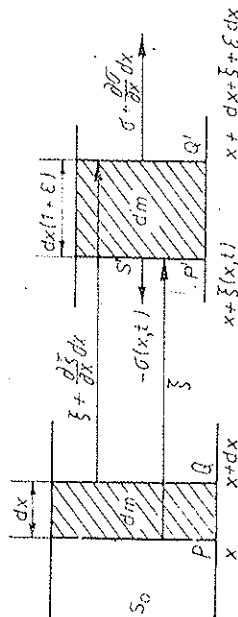


Fig. 15.5

de unde, în virtutea ecuației undelor (15.20), rezultă viteza undelor longitudinale în bară (indicele lui ρ_0 de obicei se omite în rezultatul final):

$$c_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (\text{formula lui Newton}). \quad (15.27)$$

Pentru mediu elastic nemărginit, conform lui (15.24), viteza undelor longitudinale va fi:

$$c_l = \sqrt{\frac{E'}{\rho}} = \sqrt{\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)\rho}} > c_t, \quad (c_l' \approx 1,16 c_t) \quad (15.28)$$

Ca ordin de mărime:

$$c_l \sim \sqrt{2,1 \cdot 10^{11} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 10^{-4} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} \approx 4,5 \cdot 10^3 \text{ m/s.}$$

b) Pentru undele *transversale* forța rezultantă asupra elementului de masă dm este transversală pe direcția propagării, fiind dată de efortul elastic tangențial datorit forfecării (luncării): $dF = \frac{\partial \tau}{\partial x} dx dS$ (fig. 15.6). Scriind legea fundamentală a mecanicii pentru elementul de masă dm , obținem analog lui (15.25):

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau}{\partial x}, \quad \tau = G\gamma = G \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = G \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad (15.29)$$

de unde viteza undelor transversale:

$$c_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{2(1+\mu)\rho}} < c_l, \quad (G < E), \quad (15.30)$$

$$G \approx 0,4 E, \quad c_t \approx 0,62 c_l,$$

unde G este modulul de forfecare (sau luncare).

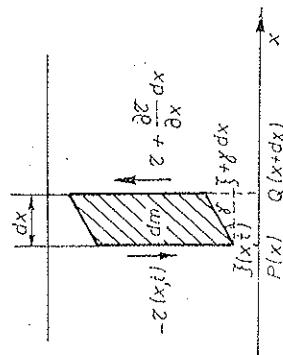


Fig. 15.6

Raportul vitezelor în mediul elastic nemărginit este

$$\frac{c_l'}{c_t} = \sqrt{\frac{2(1-\mu)}{1-2\mu}} > 1. \quad (15.31)$$

Pentru $\mu = 0,3$, rezultă $c_l'/c_t = \sqrt{3,5} = 1,87$. Această deosebire în vitezele de propagare a celor două tipuri de unde este folosită în seismologie pentru determinarea poziției epicentrului cutremurelor. Întîi sosește unda longitudinală care apare ca o vibrație (trepidație) a podelei (fig. 15.7), apoi după un

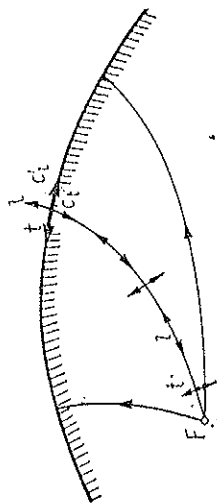


Fig. 15.7

anumit timp (cîteva zeci de secunde) sosește unda transversală care apare ca o vibrație sau oscilație orizontală (legănare).

Viteza sunetului în solide

	E , [$10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$]	ρ , [g/cm ³]	Coef. Poisson, μ	c_l , [m/s] 20°C	c_l' , [m/s]	c_t , [m/s]
Alamă	9,0	8,4-8,7	0,33	3 400	4 500	2 100
Aluminiu	7,0	2,70	0,34	5 240	6 400	3 130
Argint	7,7	10,5	0,37	2 800	3 700	1 694
Cupru	11,0	8,89	0,34	3 600	4 700	—
Fier	21,0	7,86	0,28	5 130	5 900	—
Lemn	0,9-1,7	0,7-0,9	—	3600-4000	—	—
Nichel	21,0	8,8	0,30	4 900	—	—
Oțel	20-22	7,8	0,28	5 100	6 000	—
Platină	17,0	21,45	0,39	2 800	3 960	—
Sticlă (crown)	6,0	2,4-2,8	0,25	5 000	5 700	3 300
Zinc	8,0	7,1	0,23	3 800	4 170	—

Valori extreme: Granit

Caniuc vulcanizat (0°C)

6 000
54 m/s.

15.6. DENSITATEA ȘI PRESIUNEA FLUIDULUI ÎN UNDA SONORĂ

a) Considerînd un cilindru de fluid de secțiune S , în direcția de propagare a unei plane, analog barei din fig. 15.5 (secțiunea nu se schimbă, fie că fluidul este închis într-un tub rigid, fie că este un mediu nemărginit), putem

calcula variația de densitate datorită prezenței undei, astfel (ρ_0 — densitatea fluidului în absența undei, fig. 15.8):

$$\begin{aligned} dm &= \rho_0 S dx = \rho S \left(dx + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx \right) = \rho S dx \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right), \\ \rho - \rho_0 &= \Delta \rho = -\rho \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} - (\rho - \rho_0) \frac{\partial \xi}{\partial x} \approx -\rho_0 \frac{\partial \xi}{\partial x}, \\ \frac{\Delta \rho}{\rho_0} &= \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = -\frac{\partial \xi}{\partial x}, \end{aligned} \quad (15.32)$$

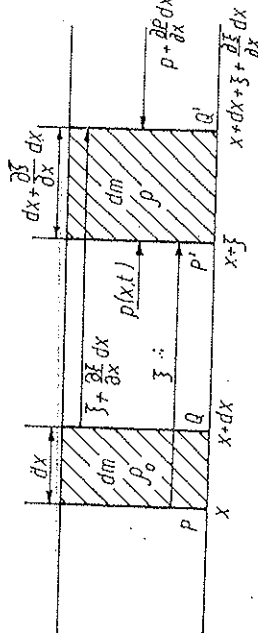


Fig. 15.8

unde am neglijat ultimul termen, deoarece în general deformările sînt foarte mici $|\partial \xi / \partial x| \ll 1$ și deci $|\rho - \rho_0| = |\Delta \rho| \ll \rho_0$. (Termenii de ordin superior sînt tratați în „acustica neliniară”, noi vom trata numai aproximația liniară). Pentru unda plană progresivă (15.2), (15.16):

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_0} = -\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{v}{c}. \quad (15.33)$$

Variația relativă a densității unui fluid într-o undă progresivă este egală cu raportul dintre viteza particulelor și viteza undei.

b) Variația densității dă naștere la o variație a presiunii. Dacă în absența undei densitatea este ρ_0 și presiunea corespunzătoare p_0 , atunci în prezența undei:

$$p - p_0 = \Delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0 (\rho - \rho_0) + \dots \approx \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0 \Delta \rho, \quad (15.34)$$

unde termenii superiori din dezvoltarea Mac Laurin pot fi neglijăți, deoarece $\Delta \rho$ și Δp sînt mici: $|\Delta \rho| \ll \rho_0$, $|\Delta p| \ll p_0$.

Deoarece oscilațiile sonore se efectuează foarte repede și conductivitatea termică a fluidelor este mică (față de cea a solidelor), căldura nu are timp să treacă de la un element al mediului la altul, deci trebuie presupus că propagarea sunetului este un proces *adiabatic*, adică în timpul propagării sunetului nu se face schimb de căldură între diferitele porțiuni ale mediului. Această ipoteză este confirmată de experiență, de aceea în expresia de mai sus

variația presiunii în raport cu densitatea, $\partial p / \partial \rho$, trebuie calculată în condițiile unui proces *adiabatic*:

$$\Delta p = p - p_0 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{ad} \Delta \rho = - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{ad} \rho_0 \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (15.35)$$

15.7. VITEZA UNDELOR ÎN FLUIDE

Aplicînd legea fundamentală a mecanicii unui strat infinit de subțire de fluid, supus forței rezultante $dF = -\frac{\partial p}{\partial x} dx \cdot S$ (fig. 15.8), avem:

$$dm \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = dF = -S \frac{\partial p}{\partial x} dx = S dx \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{ad} \rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2},$$

unde $\partial p / \partial x$ se obține derivînd (15.35). Prin urmare,

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{ad} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad (15.36)$$

de unde viteza sunetului în fluid:

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{ad}}. \quad (15.37)$$

Atunci (15.35) dă

$$\Delta p = c^2 \Delta \rho. \quad (15.38)$$

Variațiile de presiune $\Delta p = p - p_0$ în unda sonoră sînt proporționale cu variațiile de densitate $\Delta \rho = \rho - \rho_0$ ale fluidului, constanta de proporționalitate c^2 fiind pătratul vitezei de propagare a undei.

Reamintindu-ne de modulul de compresune

$$K = -V \frac{\partial p}{\partial V} = -\frac{m}{\rho} \frac{\partial p}{\partial V} \frac{\partial \rho}{\partial V} = -\frac{m}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \rho} \left(-\frac{m}{V^2} \right) = \rho \frac{\partial p}{\partial \rho}, \quad (15.39)$$

$$K_{ad} = -V \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_{ad} = \rho \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{ad},$$

unde K_{ad} este modulul de compresune adiabatică, putem scrie formula vitezei astfel:

$$c = \sqrt{\frac{1}{\rho} K_{ad}}. \quad (15.40)$$

Variația de presiune (15.35) se poate scrie acum astfel:

$$\Delta p = p - p_0 = c^2 \Delta \rho = -c^2 \rho_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} = -K_{ad} \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (15.41)$$

Variațiile de presiune și de densitate ale fluidului sunt proporționale între ele și sînt maxime acolo unde deformarea mediului este maximă. Pentru unda plană progresivă:

$$\Delta p = c^2 \Delta \rho = K_{ad} \frac{v}{c} = \rho_0 c v, \quad (15.42)$$

adică variația de presiune Δp este proporțională cu viteza particulelor.

Viteza sunetului în lichide

θ [°C]	c [m/s]	K_{izot} [10 ⁹ N/m ²]
apă	0	1 407
petrol	25	1 225
mercur	20	1 451
alcool etilic	20	1 177
		2, 04 1, 45 26, 2 1, 3

15.8. VITEZA UNDELOR ÎN GAZE

Inițial, Newton a presupus că procesul de propagare a sunetului în gaze este un proces izoterm, care se produce la temperatura gazului. Atunci, folosind ecuația Boyle-Mariotte a transformării izoterme, obținem ușor modulul K_{izot} :

$$pV = \text{const}, \ln p + \ln V = \ln \text{const}, \frac{dp}{p} + \frac{dV}{V} = 0, \quad (15.43)$$

$$\left(\frac{dp}{dV} \right)_{izot} = -\frac{p}{V}, \quad K_{izot} = -V \left(\frac{dp}{dV} \right)_{izot} = p.$$

Modulul de compresibilitate izotermă al gazelor este egal cu presiunea gazului.

Viteza sunetului ar fi atunci $c = \sqrt{p/\rho}$. Experiența însă infirmă categoric această formulă. Laplace a dat o explicație corectă, considerînd că procesul de propagare a sunetului este *adiabatic* și nu izoterm.

Folosind ecuația transformării adiabactice a lui Poisson

$$pV^\gamma = \text{const}, \gamma = C_p/C_v = c_p/c_v, \quad (15.44)$$

unde γ este exponentul adiabatic, egal cu raportul căldurilor molare sau specifice la presiune și volum constant ($\gamma > 1$; pentru gaze biatomice $\gamma \cong 1,40$), putem calcula modulul adiabatic K_{ad} :

$$\ln p + \gamma \ln V = \ln \text{const}, \frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V} = 0, \quad (15.45)$$

$$\left(\frac{dp}{dV} \right)_{ad} = -\gamma \frac{p}{V}, \quad K_{ad} = \gamma p = \gamma K_{izot}, \quad (15.46)$$

deci viteza sunetului în gaze ideale este (omitem indicele zero la p_0 și p_0 în rezultatul final):

$$c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}} = c_0 \sqrt{1 + \alpha \theta}, \quad (15.47)$$

unde am folosit ecuația de stare a gazelor perfecte:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT, \quad p = \frac{p\mu}{TR}, \quad (15.48)$$

μ — masă molară (kg/kmol), $R = 8 314,3$ J/kmol·K — constanta gazelor perfecte, $\alpha = \frac{1}{273,15}$ K⁻¹ — coeficientul de dilatare izobară sau coeficientul termic al presiunii (izocor).

Viteza sunetului în gaze crește deci cu temperatura și nu depinde de presiune. În aer, la 20°C, $c = 340$ m/s, iar în apă la 20°C, $c = 1 480$ m/s.

Viteza sunetului în gaze (m/s, 0°C)

aer (uscat)	331,46	NH ₃	415
CO ₂	260	N ₂	333,64
H ₂	1 286	CH ₄	430
O ₂	315		

Din (15.45) rezultă pentru variații mici $\left(\frac{dV}{V} = -\frac{dp}{p}, \text{ căci } p = \frac{m}{V} \right)$:

$$\frac{\Delta p}{p_0} = \gamma \frac{\Delta \rho}{\rho_0} \quad (15.49)$$

și în particular pentru o undă progresivă:

$$\frac{\Delta p}{p_0} = \gamma \frac{\Delta \rho}{\rho_0} = \gamma \frac{v}{c}. \quad (15.50)$$

Reamintindu-ne de viteza pătratică medie (viteza termică) v_T

$$v_T = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}, \quad (15.51)$$

putem scrie pentru viteza sunetului în gaze:

$$c = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{\gamma}{3} \cdot v_T^2} < v_T, \quad c > \frac{1}{\sqrt{3}} v_T = 0,58 v_T, \quad (15.52)$$

$$0,58 v_T < c < 0,75 v_T.$$

Pentru gaze monoatomice $\gamma = 5/3$, deci $c \approx 0,75 v_T$; pentru gaze biatomice (aer) $\gamma = 7/5$, deci $c = 0,68 v_T$; pentru gaze poliatomice c se apropie de $0,6 v_T$.

15.9. DENSITATEA DE ENERGIE A UNDEI

Energia cinetică a particulelor care oscilează raportată la unitatea de volum nedeformat (în absența unde) este $w_c = \frac{dm}{dV} \frac{v^2}{2} = \frac{1}{2} \rho_0 v^2$.

Am calculat în cap. 12 energia elastică de deformare pe unitatea de volum (nedeformat):

$$w_p = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 \text{ (bară)}; \quad w_p = \frac{1}{2K} (\Delta p)^2 \text{ (fluid)}.$$

Ținând seama de expresia vitezei unde elastice $c^2 = E/\rho_0$ (15.27) sau $c^2 = K_{ad}/\rho_0$ (15.40), de expresia deformației $\varepsilon = -v/c$ (15.16) și a variației de presiune $\Delta p = \rho_0 c v$ (15.42) în unda progresivă, energia elastică (potențială) de deformare pe unitatea de volum devine:

$$w_p = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 = \frac{1}{2} \rho_0 v^2 = w_c, \quad w_p = \frac{1}{2K_{ad}} (\Delta p)^2 = \frac{1}{2} \rho_0 v^2 = w_c, \quad (15.53)$$

deci coincide cu energia cinetică a unității de volum. Prin urmare, energia cinetică și cea potențială a unei plane progresive variază în concordanță de față, spre deosebire de cazul oscilatorului armonic individual. Energia totală pe unitatea de volum va fi atunci:

$$\frac{dW}{dV_0} = w = \rho_0 v^2 = \frac{1}{\rho_0 c^2} (\Delta p)^2. \quad (15.54)$$

În cazul unde plane monocromatice:

$$w = \rho_0 A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t - kx), \quad \bar{w} = \frac{1}{2} \rho_0 A^2 \omega^2. \quad (15.55)$$

Densitatea de energie a unde este proporțională cu pătratul amplitudinii de oscilație a particulelor și cu pătratul frecvenței (și cu densitatea mediului).

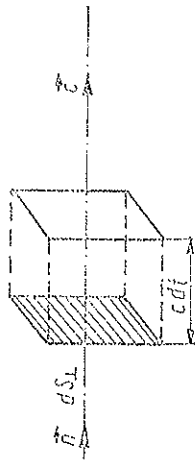
Ca ordin de mărime, pentru sunetele obișnuite în aer:

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \rho_0 A^2 \omega^2 \sim \frac{1}{2} \cdot 1,3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot (10^{-6})^2 \text{m}^2 \cdot 4\pi^2 \cdot 10^6 \text{s}^{-2} = 2,5 \cdot 10^{-5} \frac{\text{J}}{\text{m}^3}.$$

15.10. FLUXUL DE ENERGIE. INTENSITATEA SUNETULUI

Propagându-se, unda sonoră pune în mișcare oscilații noi și noi particule; în fața frontului de undă mediul este în repaus, în timp ce în spatele frontului de undă particulele mediului oscilează; prin urmare unda transportă energie. Acest transport (transfer) de energie nu este însoțit de un transport de substanță, deoarece particulele mediului execută în timpul propagării unde numai oscilații în jurul pozițiilor lor de echilibru.

Fig. 15.9



Să calculăm cantitatea de energie transportată de undă progresivă într-un timp dt printr-un element de suprafață dS_1 așezat perpendicular pe direcția de propagare a unde. După trecerea timpului dt vor fi excitate în fața elementului dS_1 toate particulele cuprinse într-un cilindru cu baza dS_1 și înălțimea $c dt$ (fig. 15.9), prin urmare:

$$dW = w dS_1 c dt = w dS_1 c dt.$$

Fluxul de energie reprezintă energia care trece printr-o suprafață așezată în unitatea de timp (se măsoară în $J/s = W$).

Fluxul de energie elementar prin suprafața elementară dS va fi deci

$$d\Phi = \frac{dW}{dt} = w c dS = \bar{w} dS, \quad \bar{w} = w c, \quad (15.56)$$

de unde densitatea fluxului de energie, adică fluxul de energie prin unitatea de arie așezată perpendicular pe direcția de propagare:

$$\bar{w} = \frac{dW}{dt dS_1} = w c = \rho_0 c v^2 = \frac{(\Delta p)^2}{\rho_0 c}, \quad \bar{w} = w c, \quad [\bar{w}] = \frac{W}{\text{m}^2}. \quad (15.57)$$

Valoarea medie a densității fluxului de energie se numește intensitatea sunetului (sau a unde):

$$I = \bar{w} = \rho_0 c \bar{v}^2 = \rho_0 c v_{ei}^2 = \frac{1}{\rho_0 c} (\Delta p)^2 = \frac{1}{\rho_0 c} (\Delta p)^2, \quad (15.58)$$

$$[I] = 1 \text{ W/m}^2 \text{ în SI},$$

unde am introdus valorile efective :

$$v_{ef} = \sqrt{\frac{v^2}{2}}, \quad (\Delta p)_{ef} = \sqrt{\frac{(\Delta p)^2}{2}}. \quad (15.59)$$

Vom numi presiune sonoră valoarea efectivă a variației de presiune :

$$p_s = (\Delta p)_{ef} = \sqrt{\frac{(\Delta p)^2}{2}}, \quad p_s = \rho_0 c v_{ef}. \quad (15.60)$$

Atunci intensitatea sunetului :

$$I = \rho_0 c v_{ef}^2 = \frac{p_s^2}{\rho_0 c} = p_s v_s, \quad (p_s = \rho_0 c v_{ef}). \quad (15.61)$$

În cazul unei plane monocromatice :

$$I = \frac{1}{2} \rho_0 c A^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \rho_0 c v_{max}^2 = \rho_0 c v_{ef}^2 = \frac{1}{2} \frac{(\Delta p)^2_{max}}{\rho_0 c} = \frac{p_s^2}{\rho_0 c} \quad (15.62)$$

Intensitatea sunetului este proporțională cu pătratul valorii efective a vitezei de oscilație a particulelor sau cu pătratul presiunii sonore.

Ca ordin de mărime pentru sunetele obișnuite :

$$I = \bar{u} c \sim 2,5 \cdot 10^{-5} \frac{\text{J}}{\text{m}^3} \cdot 340 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 8,5 \cdot 10^{-3} \text{ W/m}^2,$$

$$p_s = \rho_0 c \frac{A \omega}{\sqrt{2}} \sim \frac{1,3}{\sqrt{2}} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 340 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot 2\pi \cdot 10^3 \text{ s}^{-1} \cong 2 \text{ N/m}^2.$$

15.11. ANALOGIA ACUSTICO-ELECTRICĂ

Prin analogie cu mărimile caracteristice curentului alternativ, produsul $\rho_0 c = R_a$ se numește *rezistență (impedanță) acustică* (în $\text{kg/m}^2 \cdot \text{s} = \text{N} \cdot \text{s/m}^2$). Viteza particulelor v corespunde intensității momentane i a curentului, iar variația de presiune Δp corespunde tensiunii alternative u .

Pentru aer în condiții normale :

$$R_a = \rho_0 c = 1,293 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 334 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 428 \text{ N} \cdot \text{s/m}^2. \quad (15.63)$$

Mărimi acustice	Mărimi electrice
viteza v , [m/s] variația de presiune Δp , [N/m ²] presiunea sonoră p_s , [N/m ²] rezistența acustică $R_a = \rho_0 c$, $\left[\frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} \right]$ $\Delta p = \rho_0 c \cdot v = R_a v$ $p_s = \rho_0 c \cdot v_{ef} = R_a v_{ef}$ intensitatea sunetului I , [W/m ²] $I = \rho_0 c v_{ef}^2 = \frac{p_s^2}{\rho_0 c} = p_s v_{ef}$	intensitatea curentului i , [A] tensiunea u , [V] tensiunea efectivă U , [V] rezistența R , [Ω] $u = Ri$ $U = RI$ puterea P , [W] $P = RI^2 = \frac{U^2}{R} = UI$

15.12. UNDA SFERICĂ

În cazul undelor sferice (în mediu lipsit de absorbție) fluxul de energie prin orice suprafață sferică cu centrul în sursă este constant, egal cu puterea sursei :

$\Phi = (\text{densitatea fluxului}) \cdot (\text{aria sferei}) = \text{const}$,
de unde densitatea fluxului de energie trebuie să fie invers proporțională cu aria sferei deci cu pătratul distanței până la sursă. Prin urmare, în cazul unei sonore sferice, intensitatea sunetului variază invers proporțional cu pătratul distanței până la sursă.

Cum densitatea fluxului de energie a unei monocromatice este proporțională cu pătratul amplitudinii, rezultă că amplitudinea unei sfere monocromatice trebuie să fie invers proporțională cu distanța până la centrul undelor sferice. Rezultă că elongațiile particulelor în unda sferică progresivă monocromatică sînt :

$$\xi(r, t) = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr). \quad (15.64)$$

15.13. INTERFERENȚA

Dacă în mediu există mai multe surse de oscilații, atunci în mediu se propagă mai multe procese ondulatorii și particulele mediului sînt soliciitate simultan la mai multe mișcări oscilatorii. După cum arată experiența, elongația rezultantă a particulei se compune *vectorial* din elongațiile produse separat de fiecare oscilație. Acesta este *principiul suprapunerii* (superpoziției) undelor, adică a suprapunerii *independente* a proceselor ondulatorii sau oscilatorii. Două unde „încă una prin cealaltă” fără a se perturba reciproc. Principiul suprapunerii este o consecință matematică a *liniarității* ecuațiilor diferențiale care descriu procesele ondulatorii (suma mai multor soluții ale

ecuațiilor este de asemenea o soluție). Desigur, ecuațiile diferențiale liniare reprezintă doar o primă aproximare a mediilor reale.

Fenomenul suprapunerii undelor, cu întărirea sau slăbirea reciprocă a oscilațiilor, se numește *interferența undelor*.

Interes deosebit îl prezintă cazul a două surse care oscilează cu *aceeași frecvență* și au diferența de fază a oscilațiilor *constantă*; astfel de surse se cheamă *coerente*. Presupunem de asemenea că

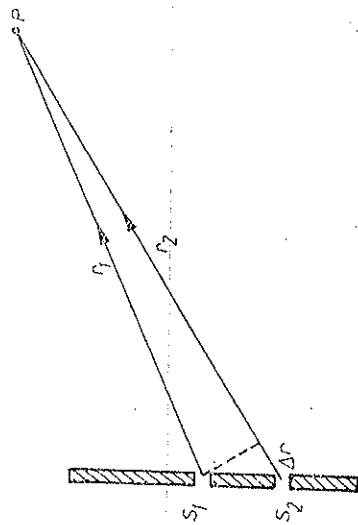


Fig. 15.10

elongațiile sînt pe aceeași direcție. În acest caz tabloul de interferență este staționar, amplitudinile oscilațiilor în diferite puncte sînt constante în timp.

Fie două surse coerente $S_{1,2}$ care oscilează în fază și un punct P situat la distanțele $r_{1,2}$ de surse (fig. 15.10). Elongațiile $\xi_{1,2}$ produse de fiecare undă și presupuse pe aceeași direcție se adună atunci algebric:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = A_1 \cos(\omega t - kr_1) + A_2 \cos(\omega t - kr_2). \quad (15.65)$$

Analog calculului de la § 14.3, amplitudinea rezultantă va fi:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos k(r_2 - r_1)}. \quad (15.66)$$

Mărimea amplitudinii rezultante depinde de diferența de fază $\Delta\varphi = k(r_2 - r_1)$ sau de diferența de drum $\Delta r = r_2 - r_1$ a celor două oscilații care se suprapun. Amplitudinea rezultantă este maximă cînd diferența de drum este un multiplu întreg de lungimi de undă sau un multiplu par de semiunde (adică de jumătăți de lungime de undă):

$$A = A_1 + A_2, \quad r_2 - r_1 = n\lambda = 2n \frac{\lambda}{2}, \quad n - \text{întreg}. \quad (15.67)$$

și minimă, cînd diferența de drum este un multiplu impar de semiunde:

$$A = |A_1 - A_2|, \quad r_2 - r_1 = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad n - \text{întreg}. \quad (15.68)$$

Dacă amplitudinile componente sînt egale, minimile se reduc la zero.

Fenomenul de interferență este frumos ilustrat de undele de suprafață care se formează pe apă la aruncarea simultană a două pietricele, la o anumită distanță între ele.

15.14. UNDELE STAționARE

Un caz interesant de interferență este suprapunerea unei incidente cu undă reflectată pe aceeași direcție Ox . În general unda reflectată va fi defazată față de cea incidentă cu un anumit unghi β , dependent de condițiile fizice ale reflexiei, și va avea amplitudinea mai mică, deoarece o parte din unda incidentă este transmisă mai departe în mediul al doilea. Considerînd pentru simplificare amplitudini egale, elongația rezultantă va fi:

$$\begin{aligned} \xi(x, t) &= A \cos(\omega t - kx) + A \cos(\omega t + kx + \beta) = \\ &= 2A \cos\left(kx + \frac{\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\beta}{2}\right) \end{aligned}$$

sau cu ajutorul reprezentării complexe:

$$\begin{aligned} \xi(x, t) &= A e^{i(\omega t - kx)} + A e^{i(\omega t + kx + \beta)} = A e^{i(\omega t + \beta/2)} (e^{-ikx + \beta/2} + \\ &+ e^{ikx + \beta/2}) = 2A \cos\left(kx + \frac{\beta}{2}\right) e^{i(\omega t + \beta/2)} \end{aligned}$$

sau elongația reală:

$$\xi(x, t) = 2A \cos\left(kx + \frac{\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\beta}{2}\right) = A' \cos\left(\omega t + \frac{\beta}{2}\right). \quad (15.69)$$

Se obține astfel o *undă staționară* (fig. 15.11). Pentru unda staționară este caracteristică *separarea* fazei $\omega t - kx$ de la unda progresivă într-un factor sinusoidal spațial și unul sinusoidal temporal. Fiecare particulă oscilează

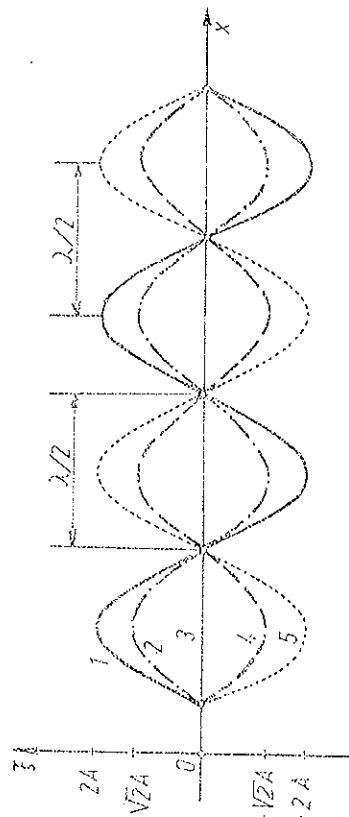


Fig. 15.11

armonic, sinusoidal, conform factorului temporal $\cos(\omega t + \beta/2)$, dar cu amplitudinea A' variabilă de la punct la punct, conform factorului spațial $A' = 2A \cos(kx + \beta/2)$, spre deosebire de unda progresivă (plană neatenuată) în care particulele oscilează cu aceeași amplitudine. În punctele pentru care

$\cos\left(kx + \frac{\beta}{2}\right) = \pm 1$ amplitudinea este maximă, egală cu $2A$ (ventre sau umflături). În punctele pentru care $\cos\left(kx + \frac{\beta}{2}\right) = 0$ amplitudinea este nulă, particulele de acolo sînt permanent în repaus (noduri). Distanța dintre două ventre sau două noduri succesive este dată de condiția:

$$\Delta\varphi = k\Delta x = \pi, \quad \Delta x = \lambda/2. \quad (15.70)$$

În fig. 15.11 sînt reprezentate elongațiile particulelor în cinci momente succesive, la un interval $T/8$; în momentul 3 din figură toate particulele trec simultan prin pozițiile lor de echilibru.

Particulele situate între două noduri vecine (succesive) oscilează toate, în fază: toate se depărtează sau se apropie de pozițiile lor de echilibru, trec simultan prin pozițiile de echilibru și simultan își ating elongațiile maxime (amplitudinile). La traversarea unui nod faza oscilațiilor se schimbă cu π (amplitudinea schimbă semnul), spre deosebire de unda progresivă în care faza variază în mod continuu de la punct la punct.

Pentru deformația relativă în unda staționară avem:

$$\epsilon(\text{sau } \gamma) = \frac{\partial \xi}{\partial x} = -2kA \sin(kx + \beta/2) \cos(\omega t + \beta/2), \quad (15.71)$$

adică amplitudinea deformației este maximă în noduri și nulă în ventre.

De exemplu, în unda longitudinală comprimările și rarefierile au amplitudinea maximă în noduri. Anume, de o parte și alta a unui nod particulele se mișcă în sensuri opuse, pe cînd într-un ventru particulele se mișcă în același sens.

Variația densității și presiunii într-un fluid într-o undă staționară longitudinală are amplitudine maximă tot în noduri:

$$\Delta\rho = -\rho_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} = 2kA\rho_0 \sin(kx + \beta/2) \cos(\omega t + \beta/2), \quad \Delta p = c^2 \Delta\rho. \quad (15.72)$$

Pe suprafața pe care se produce reflexia se formează un nod, dacă mediul pe care se reflectă unda este mai dens decît mediul în care se propagă unda. În acest caz, unda își schimbă prin reflexie faza cu $\beta = \pi$, astfel încît elongația își schimbă semnul și prin compunere cu elongația incidentă rezultă un nod, altfel spus, unda pierde prin reflexie o jumătate de lungime de undă $\lambda/2$ (corespunzător defazării cu $\beta = \pi$).

În cazul reflexiei pe un mediu mai puțin dens, faza undei nu se schimbă prin reflexie, astfel încît elongațiile se adună și se obține un ventru pe suprafața de separație.

Dacă unda reflectată are amplitudine mai mică decît unda incidentă, $A_r < A_i$, rezultă o suprapunere de undă progresivă și undă staționară, în ventre amplitudinea este maximă $A + A_r$, iar în „noduri” este minimă $A - A_r$.

15.15. PRINCIPIUL LUI HUYGENS. DIFRACTIA UNDELOR

Dacă în drumul undei se află un obstacol de dimensiuni comparabile cu lungimea de undă sau un paravan cu un orificiu (sau fantă), se observă fenomenul de ocolire a obstacolului de către undă sau de curbare a razelor (care sînt perpendiculare pe frontul de undă) (fig. 15.12). Acesta este fenomenu

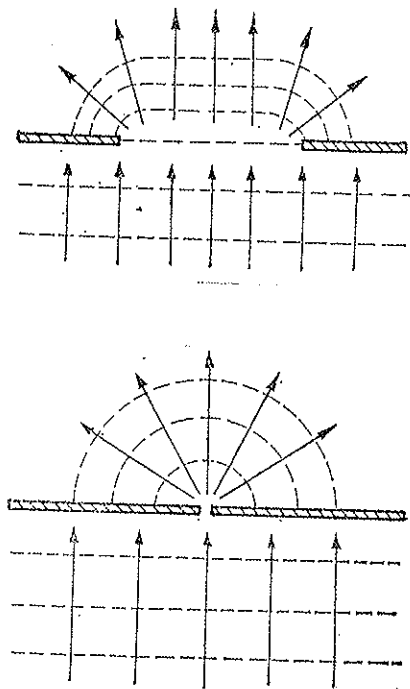


Fig. 15.12

menul de difracție a undelor, care împreună cu interferența, reprezintă două fenomene tipice ondulatorii. Construcția frontului de undă și a razelor se poate face cu ajutorul principiului lui Huygens (1690):

Fiecare punct al mediului la care a ajuns frontul de undă constituie o nouă sursă de oscilații care se propagă înainte. Înășurătoarea tuturor acestor suprafețe de undă elementare dă noul front de undă.

Două orificii mici (sau fante înguste) într-un ecran, atinse de frontul de undă, constituie două surse coerente de oscilații, astfel încît în spatele ecranului se obține un tablou de difracție și interferență (Thomas Young, 1802).

15.16. REFLEXIA ȘI REFRACTIA UNDELOR

Unda incidentă pe suprafața de separație a două medii poate suferi o reflexie și o refracție. Fie o undă plană cu suprafața de undă AB , care ajunge la suprafața de separație (fig. 15.13). Unda care se propagă din punctul B ajunge după un anumit timp t în B' , parcurgînd distanța $c_1 t = BB' = A'B' \sin \alpha_1$. În același timp unda reflectată din punctul A ajunge în A' , parcurgînd o distanță egală: $c_1 t = AA' = AB' \sin \alpha'_1$, de unde rezultă $\alpha'_1 = \alpha_1$, unghiul de reflexie este egal cu unghiul de incidență.

Unda refractată din punctul A se propagă în același timp în celălalt mediu în A'' , parcurgând distanța $c_2 t = AA'' = AB$, unde rezultă *legea refracției*:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{c_1}{c_2}, \quad \frac{\sin \alpha_1}{c_1} = \frac{\sin \alpha_2}{c_2} = \dots = \frac{\sin \alpha}{c} = \text{const.} \quad (15.73)$$

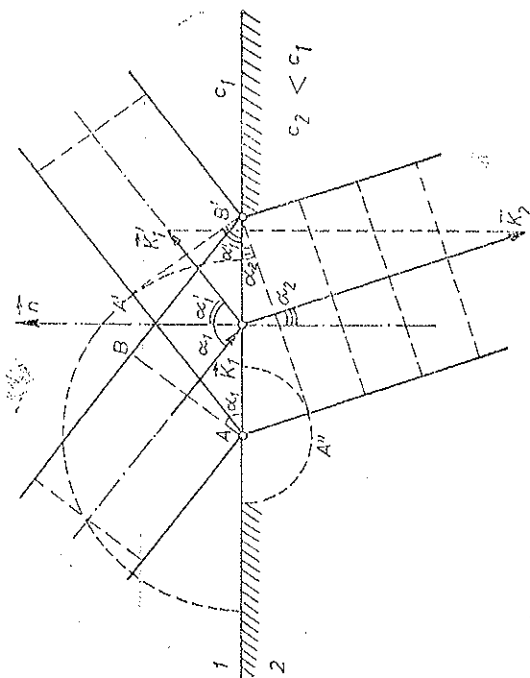


Fig. 15.13

Din legile reflexiei și refracției rezultă egalitatea componentelor *tangentele* (la suprafața de separație) ale vectorilor de undă:

$$k_1 = 2\pi/\lambda_1 = \omega/c_1 = k'_1, \quad k_2 = 2\pi/\lambda_2 = \omega/c_2; \quad (15.74)$$

$$k_1 \sin \alpha_1 = k'_1 \sin \alpha'_1 = k_2 \sin \alpha_2 = k \sin \alpha = \text{const}$$

sau sub formă vectorială:

$$\vec{k}_1 \times \vec{n} = \vec{k}'_1 \times \vec{n} = \vec{k}_2 \times \vec{n}, \quad \vec{k} \times \vec{n} = \text{const}, \quad (15.75)$$

unde \vec{n} este versorul normalei la suprafața de separație.

Dacă $c_2 < c_1$, din (15.73) rezultă $\alpha_2 < \alpha_1$, adică *raza deviază totdeauna spre regiunea de viteză de propagare mai mică*.

De exemplu, în gaze viteza sunetului crește cu temperatura. Vara, la amiază, pământul este înfierbântat și temperatura aerului scade cu înălțimea, atunci razele sonore deviază în sus și audibilitatea este scăzută. Seara, pă-

mîntul se răcește și apare o creștere a temperaturii aerului de la sol în sus, razele sonore deviază în jos și audibilitatea este mai bună.

Dacă unda vine dintr-un mediu cu viteza c_1 mai mică decât viteza c_2 din celălalt mediu, se poate produce pe suprafața de separație *reflexia totală*: raza refractată dispare. Pentru aceasta unghiul de incidență α_1 trebuie să fie mai mare decât unghiul limită dat de condiția:

$$\alpha_2 = \pi/2, \quad \sin \alpha_1 = c_1/c_2 < 1. \quad (14.76)$$

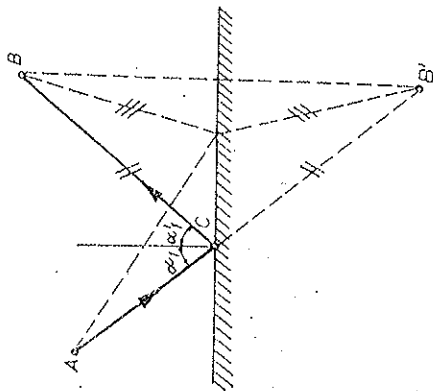


Fig. 15.14

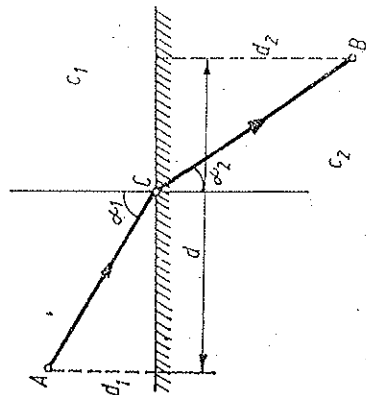


Fig. 15.15

În realitate, chiar în cazul reflexiei totale, unda pătrunde și dincolo de suprafața de separație, în mediul 2, dar este *rapid* atenuată. Dacă însă mediul 2 este foarte îngust, urmat din nou de mediul 1, atunci o parte din undă se va propaga în mediul 2 („efect tunel”).

Legile reflexiei și refracției se pot obține din condiția ca timpul de propagare a unei unde-a lungul razei reale să fie *minim* (*principiul lui Fermat*). În adevăr, pentru reflexie avem construcția simplă din fig. 15.14, iar pentru refracție, din fig. 15.15 rezultă condiția pentru timpul de propagare:

$$t = \frac{d_1}{c_1 \cos \alpha_1} + \frac{d_2}{c_2 \cos \alpha_2} = \text{min și } d_1 \tan \alpha_1 + d_2 \tan \alpha_2 = d.$$

Diferențiind ecuațiile:

$$\frac{d_1 \sin \alpha_1}{c_1 \cos^2 \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{d_2 \sin \alpha_2}{c_2 \cos^2 \alpha_2} d\alpha_2 = 0; \quad \frac{d_1}{\cos^2 \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{d_2}{\cos^2 \alpha_2} d\alpha_2 = 0,$$

trecînd al doilea termen în dreapta și împărțind ecuațiile obținute membru la membru, obținem legea refracției (15.73).

15.17. EFECTUL DOPPLER

Efectul Doppler constă în *variația frecvenței* înregistrate de un receptor R atunci când sursa S sau receptorul R se apropie sau se depărtează unul față de celălalt. Nu intervin în acest efect decât componentele *longitudinale* ale vitezelor pe direcția sursă-receptor și nu cele transversale pe această direcție.

Fenomenul se explică prin faptul că unda care se propagă în mediu apare extinsă sau comprimată după cum se mișcă sursa sau receptorul față de mediu.

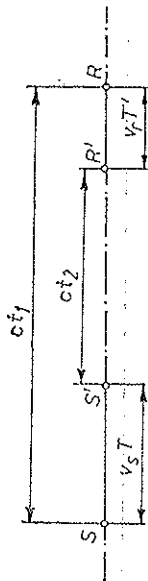


Fig. 15.16

De exemplu, dacă receptorul se deplasează în întâmpinarea undei, el va înregistra o frecvență mai mare, iar dacă se îndepărtează — o frecvență mai mică. Astfel, o barcă ce vine în întâmpinarea valurilor sau fuge din fața valurilor, va fi lovită de valuri cu o frecvență mărită, respectiv micșorată, față de cazul când ar sta pe loc sau s-ar deplasa paralel cu valurile.

Vitezele se consideră prin convenție pozitive atunci când sursa sau receptorul se apropie între ele.

Dacă primul maxim al elongației, emis de sursă în poziția S , fig. 15.16, ajunge la receptor în poziția R după timpul $t_1 = SR/c$, atunci al doilea maxim va fi emis de sursă după timpul $T = 1/\nu$ în poziția S' ; cu $SS' = v_s T$, și va ajunge la receptor în poziția R' , după timpul $t_2 = S'R'/c$ sau la momentul $T + t_2$ socotit de la emiterea primului maxim. Dar diferența de timp $(T + t_2) - t_1$ dintre sosirile celor două maxime succesive ale elongației, înregistrate de receptor, este tocmai perioada înregistrată $T' = 1/\nu'$, deci $T + t_2 - t_1 = T'$ și $RR' = v_r T'$. Din figură rezultă:

$$\begin{aligned} v_s T + v_r T' &= c(t_1 - t_2) = c(T - T'), \\ T' &= T \frac{c - v_s}{c + v_r} \text{ sau } \nu' = \nu \frac{c + v_r}{c - v_s}. \end{aligned} \quad (15.77)$$

Aceasta este formula efectului Doppler.

Dacă sursa sau receptorul se apropie unul de celălalt ($v_r > 0$ sau $v_s > 0$) frecvența înregistrată ν' va fi mai înaltă decât frecvența ν în cazul repausului. Dacă sursa sau receptorul se depărtează unul de celălalt ($v_r < 0$ sau $v_s < 0$) frecvența înregistrată va fi mai coborâtă. Efectul nu este simetric față de vitezele sursei și receptorului, fiindcă depinde *separat* de viteza sursei *față de mediu* și de viteza receptorului *față de mediu*.

Este ușor de observat efectul, de exemplu, la trecerea unui tren rapid printr-o gară dacă trenul fluieră, sau la trecerea prin fața noastră a unei

mașini sau motocicletă care claxonează. Variația relativă de frecvență va fi în acest caz:

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = \frac{2cv_s}{c^2 - v_s^2} = 2 \frac{v_s}{c}. \quad (15.78)$$

Există un efect analog și în cazul undelor electromagnetice (Doppler — Fizeau), dar este simetric în cele două viteze (depinde de viteza relativă sursă-receptor). De asemenea, există la undele electromagnetice și un efect Doppler transversal (mult mai slab).

15.18. DISPERSIA. VITEZA DE GRUP

Dacă viteza de propagare a undei (viteza de fază) depinde de lungimea de undă sau de frecvență, $c = c(\nu)$, se observă fenomenul de *dispersie*: undele de diferite frecvențe (sau lungimi de undă) se propagă cu viteze diferite.

O undă sinusoidală, infinită în spațiu și timp, cu amplitudine constantă, nu poartă nici o informație. Numai *semnalele*, mărginite în spațiu și timp, formate dintr-un *grup (pachet) de unde* cu frecvențe ω apropiate între ele și vectori de undă \vec{k} , apropiați între ei, poartă o anumită informație (de exemplu, o sinusoidă întreruptă într-un anumit ritm). Datorită interferenței undelor componente, semnalul este mărginit în spațiu și timp. Maximul amplitudinii rezultante, deci și al densității de energie (pătratică în amplitudine) se va propaga cu o viteză, numită *viteză de grup* v_g , diferită în general de viteza undelor componente.

a) Să considerăm la început pentru simplificare *doar* unde de frecvențe $\omega_{1,2}$ și numerele de undă $k_{1,2}$, care se propagă în sensul axei Ox . *Maximul* amplitudinii se va găsi la momentul t_0 în punctul x_0 în care fazele coincid (sau diferă prin 2π):

$$\varphi_1 = \omega_1 t_0 - k_1 x_0 = \varphi_2 = \omega_2 t_0 - k_2 x_0$$

sau

$$\Delta \varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (\omega_2 - \omega_1)t_0 - (k_2 - k_1)x_0 = 0.$$

În momentul următor $t_0 + dt$ punctul de maximă amplitudine se va găsi deplasat în $x_0 + dx$, ($dx = v_g dt$), în care fazele de asemenea coincid:

$$(\omega_2 - \omega_1)(t_0 + dt) - (k_2 - k_1)(x_0 + dx) = 0.$$

Ținând seama de prima condiție, rezultă

$$(\omega_2 - \omega_1)dt - (k_2 - k_1)dx = 0$$

de unde viteza de grup

$$v_g = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1} = \frac{\Delta \omega}{\Delta k}. \quad (15.79)$$

b) Fie acum un grup de unde cu frecvențele într-un interval $\text{mic } \Delta\omega$ și vectorii de undă \vec{k} într-un interval tridimensional $\text{mic } \Delta\vec{k}$. Maximul amplitudinii sau al densității de energie (centrul grupului) se va găsi la momentul t_0 în punctul \vec{r}_0 unde fazele $\varphi = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}$ ale oscilațiilor componente coincid (sau diferă prin mărimi mici de ordin superior), astfel încât interferența lor este constructivă și nu distructivă. Aceasta înseamnă că în punctul de maximă amplitudină (centrul de energie) al grupului (pachetului) de unde trebuie să avem:

$$d\varphi = t_0 d\omega - \vec{r}_0 d\vec{k} = 0.$$

În momentul următor $t_0 + dt$, centrul grupului se va găsi deplasat în $\vec{r}_0 + \frac{1}{2} d\vec{r}$, ($d\vec{r} = \vec{v}_g dt$), unde de asemenea fazele coincid:

$$(\dot{r}_0 + d\dot{r}) d\omega - (\vec{r}_0 + d\vec{r}) d\vec{k} = 0.$$

Prin urmare , avem condiția

$$dtd\omega - d\vec{r} d\vec{k} = 0 \text{ sau } dtd\omega - \vec{v}_g dt d\vec{k} = 0.$$

Scriind dezvoltat

$$d\omega = \frac{\partial \omega}{\partial k_x} dk_x + \frac{\partial \omega}{\partial k_y} dk_y + \frac{\partial \omega}{\partial k_z} dk_z = \text{grad}_k \omega \cdot d\vec{k},$$

rezultă imediat viteza de grup:

$$\vec{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} = \text{grad}_{\vec{k}} \omega. \quad (15.80)$$

Aceasta este viteză de grup cu care se deplasează centrul de energie sau maximul amplitudinii grupului de unde.

Dacă frecvența ω depinde numai de $|\vec{k}| = k$ (medii izotrope), atunci viteza de grup are valoarea

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}, \quad \left(v_f = c = \frac{\omega}{k} \right), \quad (15.81)$$

spre descobire de viteza de fază $c = \omega/k$.

Sub altă formă avem (formula lui Rayleigh):

$$v_7 = \frac{d\omega}{dk} = -\lambda^2 \frac{d(c\lambda)}{d\lambda} = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda}. \quad (15.82)$$

Dacă viteza de fază c nu depinde de lungimea de undă λ , adică în absența dispersiei, viteza de grup v_g coincide cu viteza de fază c ; forma grupului de unde nu se schimbă în timpul propagării, pachetul de unde sau semnalul nu se

deformează. Altfel, în cazul dispersiei, forma semnalului se schimbă, datorită vitezei diferite de propagare a undelor componente.

c) Se poate da o construcție grafică pentru viteza de grup (fig. 15.17):

$$OB = AC - DC = c - BD \operatorname{tg} \alpha = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda} = v_g.$$

Se vede și din construcția grafică, fig. 15.17, că intervalul de lungimi de undă (sau de frecvențe) ale grupului de unde trebuie să fie suficient de mic, pentru ca viteza de grup să fie bine definită.

În cazul dispersiei *normale*, cînd undele mai lungi se propagă mai repede decît cele scurte (cazul din figură), *dispersia* $dc/d\lambda > 0$ și $v_g < c$.

În cazul undelor *sonore*, viteza de fază practic nu depinde de frecvență de aceea dispersia sunetelor este *neglijabilă*.

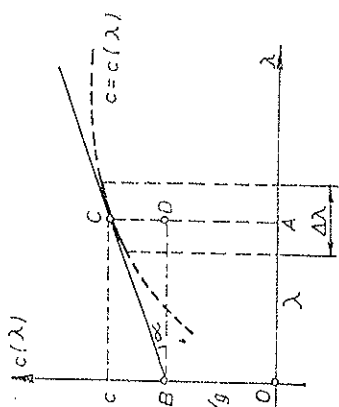


Fig. 15.17

15.19. UNDELE DE SUPRATAȚĂ

La suprafața apei (lichidelor) iau naștere binecunoscutele unde de suprafață. Experiența arată că la amplitudini nu prea mari trasectiunile particulelor de lichid sînt *circulare*. Particulele de la suprafață descriu cercuri cu razele cele mai mari, iar cele din profunzime descriu cercuri cu raze din ce în ce mai mici.

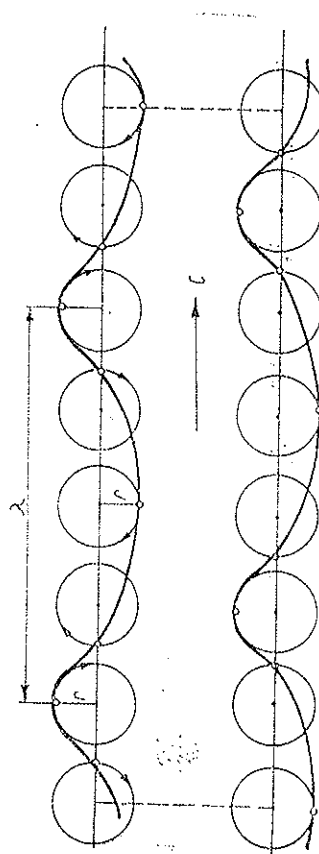


Fig. 15.18

De aici rezultă imediat, prin construcție grafică, forma undei de suprafață (fig. 15.18), care *uu* este sinusoidală: vîrfurile (dealurile) sînt mult mai ascuțite decît adînciturile (văile). Amplitudinea undei este egală cu raza cercului descris de particulele de lichid.

Se poate arăta că pentru unde foarte lungi (de exemplu, mările), când $\lambda \gg h$ ($\lambda \sim 100$ km), unde h este adâncimea apei, avem

$$c = \sqrt{gh}. \quad (15.83)$$

Pentru unde de suprafață obișnuite ($\lambda < h$):

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}}, \quad \sigma - \text{tensiunea superficială}, \quad (15.84)$$

unde primul termen reprezintă contribuția forțelor gravitaționale, iar al doilea contribuția tensiunii superficiale în restabilirea suprafeței orizontale de echilibru a lichidului.

Pentru unde marine obișnuite predomină primul termen, contribuția forțelor capilare fiind neglijabilă:

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} = g \frac{T}{2\pi}, \quad (15.85)$$

de exemplu, pentru $T = 10$ s, $c = 56$ km/h, $\lambda = 156$ m.

Dimpotrivă, pentru unde cu $\lambda \ll h$ ($\lambda \lesssim 1$ cm), predomină al doilea termen: unde capilare („încrêșturile” la suprafața apei):

$$c = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\rho\lambda}}. \quad (15.86)$$

Viteza (15.84) are un minim când cele două viteze (15.85) și (15.86) sînt egale între ele:

$$c_{\min} = \sqrt[4]{\frac{\sigma g}{\rho}} \quad \text{pentru } \lambda_m = 2\pi \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}. \quad (15.87)$$

Pentru apă (fig. 15.19):

$$c_{\min} = 0,23 \text{ m/s pentru } \lambda_m = 1,73 \text{ cm}. \quad (15.88)$$

Undele de suprafață manifestă net fenomenul de dispersie: $c = f(\lambda)$ (15.84), caracterizat de dispersia $dc/d\lambda$.

Pentru unde marine (15.85): $v_g = c/2$ (dispersia normală), iar pentru unde capilare (15.86): $v_g = 3c/2$ (dispersia anormală).

15.20. ABSORBȚIA UNDELOR

În procesul propagării undelor are loc totdeauna o transformare ireversibilă (disipare) a energiei sonore, adică a energiei mecanice a oscilațiilor ordinate ale particulelor, în energia internă a mediului (căldură). Din această cauză se produce *absorbția* sunetului, adică intensitatea undei scade treptat

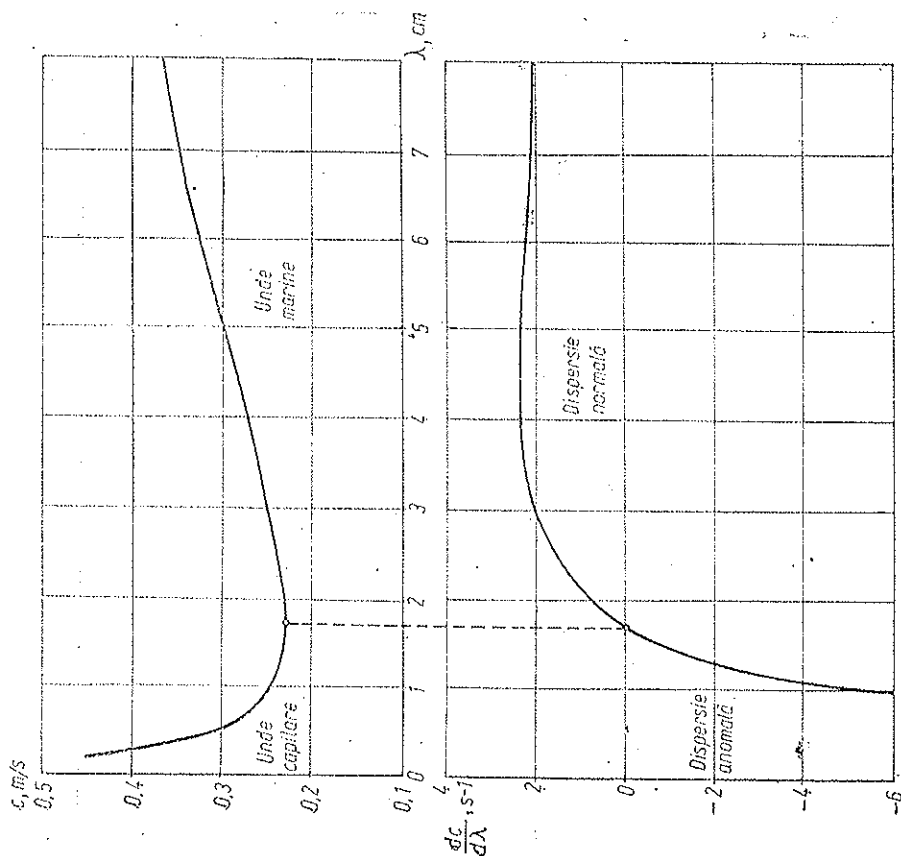


Fig. 15.19

pe măsura propagării ei. Pe o porțiune infinitesimală dx (fig. 15.20) amplitudinea unei A scade cu o cantitate infinitesimală proporțională cu porțiunea de mediu parcursă dx și cu amplitudinea A sau altfel spus, scăderea *relativă* a amplitudinii — dA/A este proporțională cu grosimea dx a stratului străbătut:

$$dA = -\alpha A dx, \quad \frac{dA}{A} = -\alpha dx, \quad (15.89)$$

unde α este *constanta de atenuare a amplitudinii*, $[\alpha] = L^{-1} = m^{-1}$. Prin integrare rezultă:

$$A = A_0 e^{-\alpha x}, \quad (15.90)$$

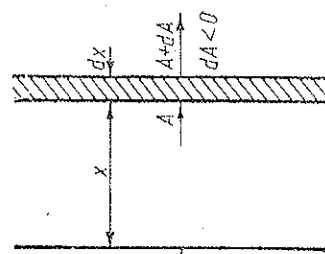


Fig. 15.20

unde A_0 este amplitudinea la $x = 0$ și x este distanța străbătută de undă. Prin urmare, amplitudinea scade exponențial cu distanța parcursă.

Po o distanță $\delta = 1/x$, numită *lungime de atenuare*, amplitudinea scade de $e \approx 2,718$ ori.

Intensitatea undei fiind proporțională cu amplitudinea la pătrat, se va atenua după legea:

$$I = I_0 e^{-2\alpha x}, \quad (15.91)$$

unde 2α este *coeficientul de absorbție sonoră* al mediului. În fluide acest coeficient depinde de viscozitate (frecare internă) și de conductivitatea termică, de asemenea de frecvența sunetului și densitatea mediului. De exemplu, la lichide $\alpha \sim \nu^2$, iar la solide $\alpha \sim \nu$.

Ecuția undei plane monocromatice, într-un mediu absorbant devine acum:

$$\xi(x, t) = A_0 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - kx). \quad (15.92)$$

În cazul propagării unui *grup de unde* (semnal), forma sa la sosire poate diferi de original, din cauza atenuării diferite a undelor componente.

Constantele de atenuare α în 10^{-3} m^{-1}

Frecvența ν , kHz	1	2	4	6	8	10
aer, 20°C	0,3	1,0	3,8	8,4	14,5	22

Pentru frecvențe mari, $\nu \sim 10 \text{ MHz}$, avem pentru apă la 20 °C: $\alpha = 25 \cdot 10^{-15} \text{ s}^2$. Pentru $\nu \sim 10 \text{ MHz}$ avem pentru oțel $\alpha = 5 \text{ m}^{-1}$ și pentru sticlă $\alpha = 2 \text{ m}^{-1}$.

PROBLEME

1. Ecuția unei unde sonore în aer este

$$\xi(x, t) = 10^{-5} \cos 2\pi(340t - x).$$

Să se calculeze: a) frecvența, lungimea de undă și viteza de propagare a sunetului; b) Amplitudinea variației relative a densității aerului și a presiunii în unda sonoră; c) Intensitatea sunetului, știind densitatea aerului $\rho = 1,3 \text{ kg/m}^3$.

R. a) $\nu = 340 \text{ Hz}$, $\lambda = 1,00 \text{ m}$, $c = 340 \text{ m/s}$;

$$b) \left(\frac{\Delta \rho}{\rho_0} \right)_m = \frac{\omega A}{c} = 6,3 \cdot 10^{-5}, \quad \left(\frac{\Delta p}{p_0} \right)_m = \gamma \left(\frac{\Delta \rho}{\rho_0} \right)_m = 8,8 \cdot 10^{-5};$$

$$c) I = \frac{1}{2} \rho_0 c \omega^2 A^2 = 0,10 \text{ W/m}^2.$$

2. O undă sonoră cu lungimea de undă $\lambda = 44,3 \text{ cm}$ se propagă în aer aflat în condiții normale. Amplitudinea de vibrație a particulelor $A = 1,00 \cdot 10^{-3} \text{ m}$. Să se calculeze: a) variația efectivă a densității aerului; b) presiunea sonoră; c) intensitatea sunetului.

$$R. \quad a) (\Delta \rho)_{ef} = \sqrt{2} \pi \frac{A}{\lambda} \rho_0 = 13 \cdot 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}; \quad b) p_s = \rho^2 (\Delta \rho)_{ef} = 14 \text{ N/m}^2;$$

$$c) I = p_s^2 / R_0 = 0,33 \text{ W/m}^2.$$

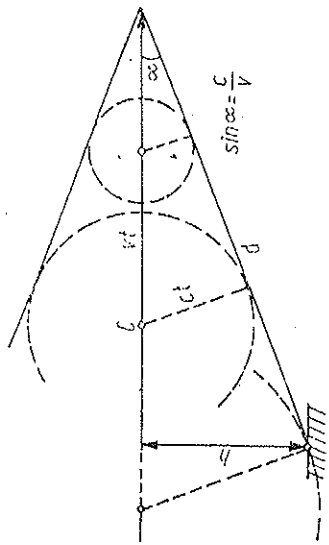


Fig. 15.21

3. Un avion cu reacție zboară cu viteza constantă $v = 500 \text{ m/s}$ la altitudinea $h = 6,8 \text{ km}$. Care este forma frontului undei de șoc produsă de avion? La ce distanță de o casă se află avionul în momentul cînd geamurile casei încep să vibreze? Viteza sunetului $c = 340 \text{ m/s}$.

R. Con cu semideschiderea α , $\sin \alpha = c/v$ (fig. 15.21),
 $d = h/c = 10 \text{ km}$.

4. Să se calculeze indicele de refracție a sunetului la suprafața de separație aer-sticlă, cunoscînd densitatea sticlei $\rho = 2600 \text{ kg/m}^3$, modulul de elasticitate $E = 7 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$ și viteza sunetului în aer $c = 340 \text{ m/s}$.

$$R. \quad n = c \sqrt{\frac{\rho}{E}} = 0,065.$$

5. Știind viteza c_0 a sunetului în aer la 0°C, să se calculeze timpul de propagare a sunetului în aer de la sol pînă la o înălțime h , dacă temperatura variază linear pe această distanță de la T_1 la T_2 .

$$R. \quad t = \frac{2h}{c_0} \sqrt{\frac{T_0}{T_1 + T_2}}.$$

6. Să se calculeze densitatea de energie cinetică, potențială și totală medie într-o undă staționară $\xi(x, t) = A \cos(kx + \beta) \cos(\omega t + \alpha)$.

$$R. \quad w_c = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 A^2 \cos^2(kx + \beta) \sin^2(\omega t + \alpha),$$

$$w_p = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 A^2 \sin^2(kx + \beta) \cos^2(\omega t + \alpha); \quad \overline{w} = \frac{1}{4} \rho_0 \omega^2 A^2 = \text{const.}$$

7. Un observator fix ascultă sunetele emise de două diapazoane identice de frecvență $\nu = 1000$ Hz, dintre care unul se depărtează, iar celălalt se apropie de observator cu aceeași viteză. Observatorul aude bătăi de frecvență $\nu_b = 10$ Hz. Care este viteza diapazanelor, dacă viteza sunetului este $c = 340$ m/s?

R.

$$\nu \cong c \nu_b / 2\nu = 1,7 \text{ m/s.}$$

8. O sursă de frecvență $\nu = 1$ kHz se mișcă pe normala la un perete, cu viteza $v = 3,4$ m/s. Viteza sunetului în aer $c = 340$ m/s. Un receptor este așezat pe aceeași normală la perete: a) între sursă și perete S-R-P; b) în exterior R-S-P; c) fixat solidar de sursă. Să se calculeze frecvența bătăilor înregistrate de receptor.

$$\text{R. a) } 0; \text{ b) } \nu_b = \nu \frac{2cv}{c^2 - v^2} \approx 2\nu \frac{v}{c} \approx 20 \text{ Hz}; \text{ c) } \nu_b = \nu \frac{2v}{c} \approx 2\nu \frac{v}{c} = 20 \text{ Hz.}$$

9. Pe normală la un perete se află o sursă sonoră de frecvență $\nu = 1,00$ kHz și un receptor. Dacă peretele se depărtează cu viteza $v = 1,0$ m/s ce frecvență a bătăilor înregistrează receptorul? (viteza sunetului $c = 340$ m/s).

R.

$$\nu_b = 2\nu \frac{v}{c+v} \approx 2\nu \frac{v}{c} = 5,9 \text{ Hz.}$$

10. Pe o axă se află o sursă de sunete de frecvență $\nu = 1$ kHz care oscilează de-a lungul axei cu frecvența unghiulară $\omega = 34 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ și amplitudinea $A = 10$ cm. Ce interval de frecvențe aude un observator fix situat pe axă? (viteza sunetului $c = 340$ m/s).

R.

$$\Delta\nu = \nu \frac{2\omega A/c}{1 - (\omega A/c)^2} \approx \nu \frac{2\omega A}{c} = 20 \text{ Hz.}$$

CAPITOLUL 16

SISTEME ACUSTICE

Sistemele acustice sînt sisteme oscilante, care generează unde sonore, precum coarde, membrane, plăci vibrante, tuburi sonore, sau receptoare de sunete. Urechea omenească este un receptor excepțional, el analizează sunetul ca un aparat spectral, descompunîndu-l în spectrul oscilațiilor armonice simple (spre deosebire de ochiul omenească).

16.1. COARDA VIBRANTĂ

16.1.1. VITEZA UNDELOR TRANSVERSALE

Să studiem vibrațiile transversale ale unei coarde întinse de o forță F . Vom presupune că oscilațiile tuturor punctelor coardei se produc într-un același plan fix, pe care îl alegem plan $Ox\xi$ (fig. 16.1). Presupunem coarda elastică, omogenă și absolut flexibilă, adică tensiunea F este tangentă la coardă (fără forțe transversale), adică este valabilă legea Hooke. Neglijăm forțele de frecare cu mediul exterior și neglijăm greutatea proprie a coardei. Considerăm numai oscilațiile mici, astfel încît coarda deviază foarte puțin de la linia dreaptă Ox . Atunci unghiul α dintre tangenta la coardă și axa Ox va fi mic:

$$\frac{\partial}{\partial x} \xi(x, t) = \tan \alpha \approx \alpha, \quad \sin \alpha \approx \alpha, \quad \cos \alpha \approx 1. \quad (16.1)$$

Să considerăm un segment infinitesimal (elementar) ds de coardă de masă dm. Deoarece punctele coardei se mișcă transversal, nu avem accelerație și forță în direcția Ox (în cadrul aproximațiilor făcute), de aceea:

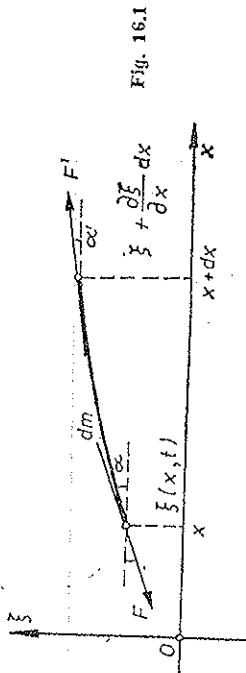
$$F' \cos \alpha' - F \cos \alpha = 0, \quad \cos \alpha' \approx 1, \quad \cos \alpha \approx 1 \rightarrow F' \approx F, \quad (16.2)$$

adică în primă aproximație tensiunea este aceeași de-a lungul coardei (independentă de x). La fel, lungimea arcului ds coincide în primă aproximație cu

dx , deoarece $dx \cong ds \cos \alpha \approx ds$, deci și densitatea rămâne aceeași în primă aproximație.

Pe direcția transversală forța rezultantă asupra elementului dm este

$$\begin{aligned} F' \sin \alpha' - F \sin \alpha &\approx F(\alpha' - \alpha) \approx F \left[\frac{\partial}{\partial x} \xi(x + dx, t) - \frac{\partial}{\partial x} \xi(x, t) \right] = \\ &= F \frac{\partial}{\partial x} \left[\xi(x + dx, t) - \xi(x, t) \right] = F \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \xi(x, t) dx = F \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx, \end{aligned} \quad (16.3)$$



și conform ecuației fundamentale a dinamicii

$$F \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx = dm \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \rho S dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

de unde rezultă ecuația diferențială a vibrațiilor transversale ale coardei libere, ecuația binecunoscută a undelor:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad (16.4)$$

$$c = \sqrt{\frac{F}{\rho S}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}, \quad \sigma = \frac{F}{S}, \quad c = \sqrt{\frac{F}{\rho_t}}, \quad (16.5)$$

unde c este deci viteza undelor transversale în coardă ($\rho_t = \rho S$ — densitatea liniară a coardei). Expresia ei este analoagă vitezei undelor elastice într-un solid ($c_1 = \sqrt{E/\rho}$, $c_2 = \sqrt{G/\rho}$) sau într-un fluid ($c = \sqrt{K_{ad}/\rho}$), în particular în gaze ($c = \sqrt{\gamma p/\rho}$), rolul modulusului elastic îl joacă acum tensiunea elastică σ din coardă.

16.1.2. FRECVENȚELE PROPRII

Ecuația undelor (16.4) admite ca soluții atât unde progresive, cât și unde staționare:

$$\xi(x, t) = A \cos(kx + \beta) \cos(\omega t + \alpha). \quad (16.6)$$

În adevăr, derivatele parțiale sînt

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 \xi, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -k^2 \xi, \quad \text{dar } c = \frac{\omega}{k}, \quad (16.7)$$

și ele verifică ecuația undelor (16.4). Constantele A , α și β se determină din condițiile inițiale și la *margină* (pe frontieră).

De exemplu, pentru o coardă fixată la capătul $x = 0$ trebuie să avem acolo permanent $\xi(0, t) = 0$, adică un nod, de aceea

$$\xi(x, t) = A \sin kx \cdot \cos \omega t. \quad (16.8)$$

Prin alegerea factorului spațial $\sin kx$, condiția pentru capătul $x = 0$ este automat verificată.

Dacă și celălalt capăt $x = l$ este fixat (nod și la acest capăt), atunci:

$$\xi(l, t) = 0, \quad \sin kl = 0, \quad kl = n\pi, \quad l = n \frac{\lambda}{2}, \quad n \in N,$$

$$v_n = n \frac{c}{2l} = n v_1, \quad v_1 = \frac{c}{2l}. \quad (16.9)$$

Lungimea corzii cuprinde un număr întreg de jumătăți de lungime de undă (de semiuunde).

Frecvențele v_n se numesc *frecvențele proprii* ale corzii. Frecvența $v_1 = \frac{c}{2l}$ este frecvența *fundamentală* (prima armonică); frecvențele v_n , $n > 1$, sînt frecvențele *armonicilor* superioare, egale cu un multiplu întreg al frecvenței fundamentale (fig. 16.2).

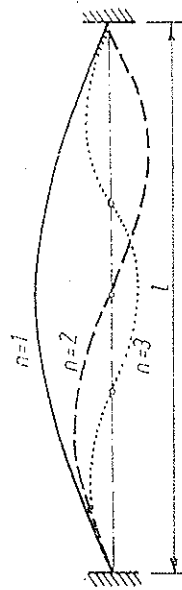


Fig. 16.2

Undele staționare sînt în realitate totdeauna amortizate din cauza frecărilor cu mediul exterior.

O vibrație arbitrară a corzii reprezintă o suprapunere a vibrațiilor proprii, cu anumite amplitudini și faze inițiale.

16.2. TUBURILE SONORE

Analog coardei vibrante, și în cazul tuburilor sonore avem un șir infinit de vibrații proprii. Frecvențele proprii se obțin din *condițiile la margine*. La tuburile sonore obișnuite excitarea unei staționare în coloana de aer se

face la un capăt al tubului cu ajutorul unei lame pusă în vibrație prin suflarea aerului, prin urmare la acest capăt avem un ventru și ecuația undelor staționare va fi atunci:

$$\xi(x, t) = A \cos kx \cos \omega t. \quad (16.10)$$

Celălalt capăt al tubului poate fi închis (tuburi sonore închise) și acolo se va forma atunci un nod, sau deschis (tuburi sonore deschise) și atunci se va forma acolo un ventru (fig. 16.3).

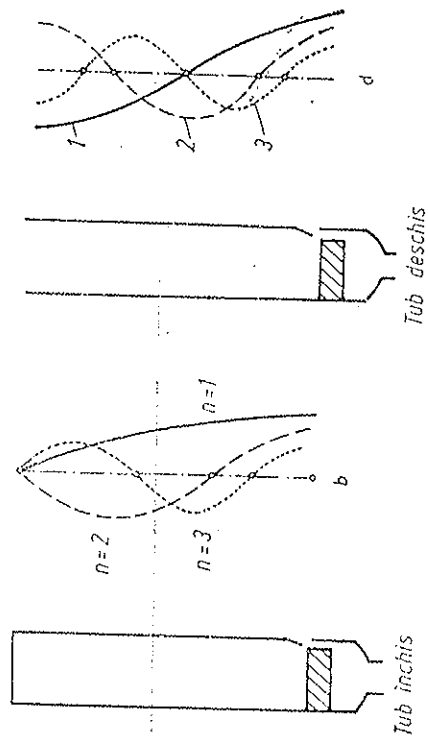


Fig. 16.3

La tuburi închise:

$$\cos kl = 0, \quad kl = (2n-1) \frac{\pi}{2}, \quad l = (2n-1) \frac{\lambda}{4}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$v = (2n-1) \frac{c}{4l} = (2n-1) v_1, \quad v_1 = \frac{c}{4l}, \quad (16.11)$$

deci lungimea tubului închis este egală cu un număr impar de sferturi de lungime de undă $\lambda/4$ și se pot forma numai armonice impare: frecvențele proprii sînt multipli impari ai frecvenței fundamentale.

La tuburile deschise:

$$\cos kl = \pm 1, \quad kl = n\pi, \quad l = n \frac{\lambda}{2} = 2n \frac{\lambda}{4}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$v_n = n \frac{c}{2l} = nv_1, \quad v_1 = \frac{c}{2l}, \quad (16.12)$$

deci lungimea tubului deschis este egală cu un număr par de $\lambda/4$ (sau număr întreg de $\lambda/2$) și se pot forma toate armonicele.

Frecvența fundamentală a unui tub sonor deschis este de două ori mai mare decât frecvența fundamentală a aceluiași tub sonor închis.

16.3. NIVELUL SONOR

Urechea omenească este un spectroscop care determină intensitatea vibrațiilor într-o scară *logaritmă* și frecvențele lor (între anumite limite). De exemplu, pentru $\nu \sim 1$ kHz, intensitatea minimă a pragului auditiv inferior $I_0 \approx 10^{-12}$ W/m² și intensitatea maximă a pragului auditiv superior $I_m \approx 10^2$ W/m², deci un interval de intensități excepțional de întins: $I_m/I_0 \approx 10^{14}$! deci 14 ordine de mărime! Dacă ținem seama că suprafața timpanului este sub 1 cm², atunci energia incidentă pe secundă, la pragul auditiv inferior, este de $\sim 10^{-16}$ J! Capacitatea de a aprecia sunetele ca intensitate este de aproximativ $\Delta I/I = 0,25$, iar ca frecvență de aproximativ $\Delta \nu/\nu = 0,3$ (între 1 și 6 kHz).

a) Conform legii Weber-Fechner variația intensității senzației este proporțională cu logaritmul raportului dintre intensitățile respective ale excitației:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = k \lg \frac{I_2}{I_1} \text{ sau } S - S_0 = k \lg \frac{I}{I_0}. \quad (16.13)$$

Dacă intensitatea excitației crește în progresie geometrică, intensitatea senzației crește în progresie aritmetică.

De aici rezultă necesitatea de a introduce pentru caracterizarea mărimilor electroacustice (în telefonie, radiodifuziune etc.) mărimi corespunzătoare intensității senzației, conform legii Weber-Fechner. Astfel se definește *nivelul de intensitate sonoră* L măsurat în bel (B) (după numele lui Bell) sau în neperi (după numele lui Neper):

$$L \stackrel{\text{def}}{=} \lg \frac{I}{I_0} \text{ în B sau } L = \ln \frac{I}{I_0} \text{ în Np}, \quad (16.14)$$

unde I_0 este intensitatea de referință, de obicei pragul auditiv inferior la 1 kHz: $I_0 = 10^{-12}$ W/m². Practic, se folosește unitatea decibel (dB). Cum intensitatea sunetului este proporțională cu pătratul presiunii sonore, rezultă:

$$L \stackrel{\text{def}}{=} 10 \lg \frac{I}{I_0} = 20 \lg \frac{(\Delta p)_{\text{ef}}}{(\Delta p)_0} = 20 \lg \frac{p_s}{p_0} \text{ în dB}, \quad (16.15)$$

unde presiunea sonoră $p_0 \approx 2 \cdot 10^{-5}$ N/m² corespunde pragului intensității $I_0 = 10^{-12}$ W/m².

b) Intensitatea senzației auditive depinde nu numai de intensitatea sonoră a excitației, ci și de frecvență, fiind maximă între 1 și 3 kHz, de aceea legea Weber-Fechner (16.13) se scrie astfel:

$$S(I, \nu) - S(I_0, \nu) = k(\nu) \lg \frac{I(\nu)}{I_0}, \quad (16.16)$$

unde constanta de proporționalitate k depinde de frecvența sunetului, avînd un maxim aproape de 2 kHz, unde urechea are sensibilitate maximă.

Dacă alegem intensitatea sonoră de referință I_0 variabilă cu frecvența, corespunzător pragului auditiv inferior, adică corespunzător lui $S(I_0, \nu) = 0$, deci $I_0(\nu)$, obținem formula intensității senzației în funcție de intensitatea excitației:

$$S(I, \nu) = k(\nu) \lg \frac{I(\nu)}{I_0(\nu)}, \quad (16.17)$$

unde $I_0(\nu)$ descrie curba pragului auditiv inferior (fig. 16.4). Normind constanta $k(\nu)$ la valoarea $k = 10$ pentru $\nu = 1$ kHz, formula (16.17) definește nivelul intensității auditive sau *tăria sunetului* în phoni (phon).

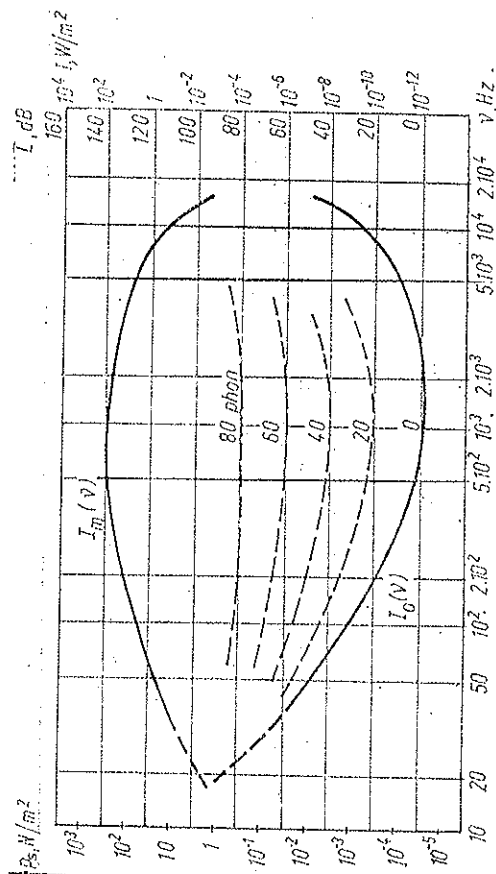


Fig. 16.4

Prin urmare, *tăria sunetului exprimată în phoni este egală cu nivelul sonor exprimat în decibeli al sunetului de referință de 1 kHz care produce aceeași intensitate a senzației auditive.*

Un phon corespunde aproximativ puterii de rezoluție a urechii relativ la tăria sunetului (puterea de rezoluție în frecvență este $\Delta\nu/\nu \approx 0,02$).

Practic, reglăm intensitatea sunetului de referință de 1 kHz până obținem aceeași intensitate a senzației auditive (aceeași tărie subiectivă a sunetului) cu cea a sunetului de măsurat. Atunci nivelul sonor în decibeli al sunetului de referință (etalonat de exemplu după presiunea sonoră) ne dă tăria în phoni a sunetului măsurat.

c) Constanta $k(\nu)$ din (16.17) se poate determina experimental. În afara domeniului auzibil (16 — 20 000 Hz) ea este nulă.

Infrașunetele (0 — 16 Hz) sînt percepute de anumite animale: păsări și pești, dacă se stîrnește o furtună ele aud infrașunetele respective și se refugiază sau se retrag din zona respectivă. La fel, în cazul cutremurelor, unele animale percep infrașunetele însoțitoare și intră în panică, înainte ca omul să sesizeze unda seismică.

Tot astfel, unele animale: lilieci, delfinii, emit și percep *ultrasunetele* ($\nu > 20$ kHz). Deoarece $\lambda < 2$ cm, ultrasunetele manifestă net proprietăți de direcțivitate. Emițind impulsuri de ultrasunete dirijate și recepționându-le reflectate pe obiecte, aceste animale se orientează în spațiu (pot sesiza și mișcarea obiectelor pe baza efectului Doppler).

În cazul *urechii umane*, pe baza multor măsurători la diferite persoane, se obțin curbele mediate din fig. 16.4. Se vede că întreaga scală a intensităților auditive cuprinde 140 phoni pentru oricare frecvență audibilă: zero phoni pentru pragul auditiv inferior (pentru oricare frecvență) și 140 phoni pentru pragul auditiv superior (pentru oricare frecvență audibilă).

Tabela de tărie sonore

Sursa	Tăria, phon
Tic-tacul unui ceasornic, la distanța de 1 m	20
Cameră liniștită sau șoapte	30
Pași sau vorbire încetă, la distanța de 1 m	40
Vorbire obișnuită, la distanța de 1 m	65
Vorbire tare, la distanța de 5 m	70
Vorbire tare, la distanța de 1 m	80
Stradă zgomotoasă	90
Orchestra mare sau zgomotul unei motocicletete	100
Zgomotul unui motor de avion (la 3—5 m)	130

d) După cum am spus, urechea are sensibilitate maximă în intervalul 1 — 3 kHz, pragul auditiv inferior atinge aici valoarea $I_0 \approx 10^{-12}$ W/m². Presiunea sonoră efectivă în aer, corespunzătoare acestui prag este, după cum am spus, $p_0 \approx 2 \cdot 10^{-5}$ N/m²:

$$I = \frac{(\Delta p)^2}{\rho_0 c} = \frac{p_0^2}{\rho_0 c}, \quad p_0 = \sqrt{I \rho_0 c} = \sqrt{10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 428 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^3}} = 2,06 \cdot 10^{-5} \text{ N/m}^2. \quad (16.18)$$

Amplitudinea corespunzătoare de vibrație a moleculelor, la frecvența de 1 kHz:

$$I = \frac{1}{2} \rho_0 c \omega^2 A^2, \quad A = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2I}{\rho_0 c}} = \frac{1}{2\pi \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}} \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-12} \text{ W/m}^2}{428 \text{ N} \cdot \text{s/m}^3}} = 1,09 \cdot 10^{-11} \text{ m} = 0,1 \text{ Å}, \quad (16.19)$$

adică o zecime din diametrul unui atom de hidrogen! La pragul auditiv superior intensitatea sonoră ajunge la $I_m \approx 100$ W/m², presiunea sonoră $p_s \approx 200$ N/m², iar amplitudinea de vibrație a moleculelor la 1 kHz: $A \approx 10^{-4}$ m = 0,1 mm. Urechea este deci un aparat care măsoară mărimi de la *nivelul atomic până la nivelul macroscopic*! (la fel ca și ochiul).

16.4. ANALIZA SUNETELOR

a) O oscilație *periodică*, adică un sunet muzical, se poate descompune într-o serie de oscilații sinusoidale sau tonuri muzicale (serie Fourier):

$$\xi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \alpha_n). \quad (16.20)$$

Deoarece urechea omenească nu este sensibilă la defazajele oscilațiilor componente (G. S. Ohm), spectrul sunetului (amplitudinile A_n în funcție de frecvență) este suficient pentru a caracteriza sunetul, adică două sunete cu același spectru dau aceeași senzație auditivă. *Timbrul* sunetului este determinat de prezența și intensitatea armoniceilor.

b) Zgomotele sînt sunete *aferiodice*, cu amplitudine variabilă neregulat. Ele nu mai au un spectru de linii, ci un spectru *continuu* dat de integrala Fourier:

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\omega) \cos[\omega t + \alpha(\omega)] d\omega, \quad (16.21)$$

unde graficul densității spectrale sau densității de amplitudine $a(\omega)$ dă spectrul continuu.

Prin urmare, orice oscilație este pînă la urmă o suprapunere (discontinuu - discretă sau continuu) de oscilații armonice, cu spectru de linii (frecvențe discrete) sau spectru continuu.

Analiza sunetului se poate face cu ajutorul unor aparate electroacustice care transformă în prealabil oscilațiile sonore în oscilații electrice de aceeași formă și acestea din urmă sînt apoi descompuse în oscilații sinusoidale.

c) O sinusoidă (sau o undă plană monocromatică), infinită în spațiu și timp, are spectrul format dintr-o singură linie ω de amplitudine A . Un fragment de sinusoidă, mărginit în spațiu (Δx) și timp (Δt) , are spectru continuu de largime $\Delta\omega$ în jurul frecvenței ω (fig. 16.5). Cu cît segmentul de sinusoidă este mai restrîns în spațiu și timp, cu atît spectrul său este mai larg:

$$\Delta\omega \sim \frac{1}{\Delta x}, \quad \Delta\omega \sim \frac{1}{\Delta t}.$$

Cînd $\Delta x \rightarrow \infty$, $\Delta t \rightarrow \infty$, spectrul se îngustează și tinde către o

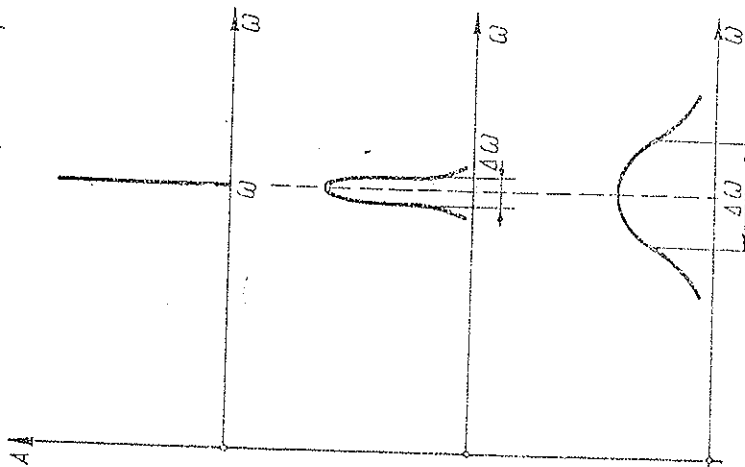


Fig. 16.5

singură linie spectrală, bine determinată ($\Delta\omega \rightarrow 0$, $\Delta k \rightarrow 0$). Dimpotrivă, cînd $\Delta x \rightarrow 0$ și $\Delta t \rightarrow 0$, spectrul se lărgeste la nesfîrșit ($\Delta\omega \rightarrow \infty$, $\Delta k \rightarrow \infty$).

Știind că pentru o particulă elementară $E = \hbar\omega$, $\vec{p} = \hbar\vec{k}$, regăsim în (16.22) relațiile de nedeterminare ale lui Heisenberg.

d) Noi ne-am mărginit numai la „acustica liniară”, adică am păstrat numai termenii liniari în diferite relații, neglijînd termenii superiori (am „linearizat” ecuațiile sau ne-am restrîns la prima aproximație liniară). La amplitudini mari se manifestă și termenii pătratici, care dau efecte specifice („acustica neliniară”). De exemplu, în radiotehnică, pentru amplitudini mari ale semnalului, caracteristica tuburilor electronice nu mai poate fi aproximată printr-o linie dreaptă și atunci termenii pătratici dau frecvențe *nedorite*, cum ar fi *diferența sau suma* frecvențelor a două sunete $\omega_{1,2}$. Astfel dacă pe lângă termenul liniar, avem și un termen pătratic, atunci

$$\begin{aligned} f(\xi) &\sim \xi^2 = (A_1 \cos \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t)^2 = \\ &= \frac{1}{2} A_1^2 (1 + \cos 2\omega_1 t) + \frac{1}{2} A_2^2 (1 + \cos 2\omega_2 t) + \\ &\quad + A_1 A_2 [\cos(\omega_1 - \omega_2) t + \cos(\omega_1 + \omega_2) t]. \end{aligned}$$

Frecvențele $2\omega_1$, $2\omega_2$ sînt mai puțin supărătoare, căci schimbă timbrul sau ies din domeniul auzibil, suma $\omega_1 + \omega_2$ poate de asemenea să iasă din domeniul auzibil, în schimb *diferența* $\omega_1 - \omega_2$ este supărătoare.

Dealtfel și urechea omenească este „neliniară”, la amplitudini mari ale sunetelor, pe lângă două tonuri $\omega_{1,2}$, auzim și tonul de frecvență $\omega_1 - \omega_2$ sau chiar alte tonuri „combinat”: $\omega_1 + \omega_2$, $2\omega_1 + \omega_2$, $\omega_1 + 2\omega_2$. Fenomenele fizice legate de auz sînt studiate în *acustica fiziologică*.

16.5. ULTRASUNETE

Ultrasunetele au frecvențe de la 20 kHz în sus, pînă la frecvențe de ordinul 10 GHz (10^{10} Hz). Ultrasunetele se obțin cu ajutorul anumitor cristale, numite *piezoelectrice* (piezocristale), care manifestă fenomenul de *electrostrictiune*, adică de contracție sau dilatare sub acțiunea unui cîmp electric. Cel mai folosit este cuarțul, din care se taie o placă (lamă) cu o anumită orientare față de axele cristalografice (piezocuarț). Grosimea plăcii se alege astfel încît să vibreze în rezonanță cu cîmpul electric alternativ aplicat (prin intermediul unui condensator).

Astfel, pentru $\nu = 1$ MHz grosimea plăcii va fi ($c = 5,5$ km/s) (fig. 16.6):

$$l = \frac{\lambda}{2} = \frac{c}{2\nu} = \frac{5500 \text{ m/s}}{2 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}} = 2,7 \text{ mm}. \quad (16.23)$$

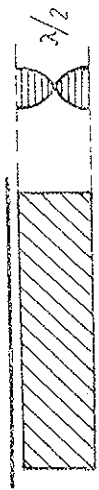


Fig. 16.6

Aceeași lamă servește și ca receptor de ultrasunete, datorită efectului invers. Intrînd în vibrație de rezonanță sub acțiunea undei ultrasonore, lama se polarizează alternativ, adică pe fețele sale apar sarcini electrice alternante. Se poate folosi și fenomenul de *magnetostricțiune*: variația dimensiunilor miezului magnetic al unei bobine sub acțiunea cîmpului magnetic, creat de curentul alternativ care străbate înfășurarea bobinei.

Ultrasunetele sînt absorbite puternic în gaze și slab în lichide și solide. Intensitatea ultrasunetelor poate atinge valori pînă la 10^5 W/m^2 , iar presiunea pînă la $\sim 10 \text{ atm}$. Din cauza intensității este proporțională cu pătratul amplitudinii și pătratul frecvenței, $I = \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 A^2$, amplitudinile de vibrație a particulelor nu sînt mari.

Datorită lungimii de undă mici, fenomenul de difracție este slab exprimat pentru obstacolele obișnuite, astfel încît se obțin fascicule înguste, bine dirijate, de ultrasunete.

În lichide, în momentele de rarefiere, la intensități mari ale ultrasunetului, se pot produce ruperi ale lichidului: formarea de goluri sau cavități, în care pătrund gazele dizolvate și vaporii lichidului. Acest fenomen se numește *cavitatie*. În momentele imediat următoare, de comprimare a cavității, se nasc presiuni foarte înalte. Cavităția explică de exemplu, distrugerea unor suprafețe solide (elice la vapoare).

Nașterea unor presiuni alternative mari și a unor accelerații mari ale particulelor în lichide în unda ultrasonoră explică o serie de efecte fizice ale ultrasunetelor și își găsește aplicații tehnice. Astfel cităm: formarea de emulsii din lichide nemiscibile (mercur și apă), dispersarea solidelor în lichide (sulf, mîncă, camfor în apă), coagularea aerosolilor și hidrosolilor, fisionarea unor macromolecule sau accelerarea unor reacții chimice.

Pe absorbția diferită a ultrasunetelor în gaze și solide se bazează *defectoscopia ultrasonoră* (nedestructivă) a pieselor metalice, adică descoperirea de goluri sau fisuri în interiorul piesei.

Hidrolocația ultrasonoră, adică detectarea obiectelor sau obstacolelor submarine, se bazează pe obținerea fasciculelor înguste, dirijate, de ultrasunete. Comunicația între submarine se poate menține cu ajutorul ultrasunetelor.

Ultrasunetele au aplicații și în biologie, de exemplu distrugerea unor microorganisme (bacterii) etc.

PROBLEME

1. O coardă întinsă cu forța $F_1 = 160 \text{ N}$ dă bătăi de frecvență $\nu_0 = 20 \text{ Hz}$ cu un diapazon. Întinsă fiind cu forța $F_2 = 250 \text{ N}$, ea vibrează la unison cu diapazonul. Să se afle frecvența diapazonului.

$$R. \quad \nu = \frac{\nu_0}{1 - \sqrt{F_1/F_2}} = 100 \text{ Hz.}$$

2. Sunetul fundamental emis de o coardă produce $\nu_0 = 10 \text{ Hz}$, bătăi pe secundă, cu sunetul emis de un diapazon. Dacă se scurtează coarda cu fracțiunea $f = 0,01 = 1\%$ din lungimea ei, ea intră în rezonanță cu diapazonul. Să se afle frecvența diapazonului.

$$R. \quad \nu = \frac{1}{f} \cdot \nu_0 = 1000 \text{ Hz.}$$

3. O coardă de masă m este fixată la capete. Ea vibrează pe frecvența sa fundamentală ω cu amplitudinea maximă A_m . Să se calculeze energia cinetică maximă a corzii și energia cinetică medie.

$$R. \quad E_{c \max} = \frac{1}{4} m \omega^2 A_m^2; \quad \overline{E_c} = \frac{1}{8} m \omega^2 A_m^2.$$

4. Un tub sonor închis emite tonul fundamental de frecvență $= 250 \text{ Hz}$. Cunoșcînd viteza sunetului în aer $c = 340 \text{ m/s}$, să se afle lungimea tubului și frecvența tonului fundamental emis de același tub dacă îl deschidem.

$$R. \quad l = \frac{c}{4\nu} = 0,34 \text{ m}, \quad \nu' = 2\nu = 500 \text{ Hz.}$$

5. Două tuburi sonore, unul închis și altul deschis, au aceeași lungime. Tubul deschis are frecvența fundamentală $\nu = 440 \text{ Hz}$. Să se calculeze frecvența armonice a 3-a a tubului deschis și frecvența armonice a 3-a a tubului închis.

$$R. \quad \nu_3 = 3\nu = 1320 \text{ Hz}; \quad \nu'_3 = 3 \frac{\nu}{2} = 660 \text{ Hz.}$$

6. În timpul vorbirii normale presiunea sonoră este $p_s = 0,20 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ la frecvența $\nu = 400 \text{ Hz}$. Să se calculeze viteza efectivă a particulelor, amplitudinea oscilațiilor și intensitatea sunetului, cunoscînd rezistența acustică a aerului $R_a = 400 \text{ N} \cdot \text{s/m}^3$. Care este nivelul sonor?

$$R. \quad v_{ef} = \frac{p_s}{R_a} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}; \quad A = \frac{\sqrt{2} p_s}{\omega R_a} = 0,28 \cdot 10^{-6} \text{ m}, \\ I = \frac{p_s^2}{R_a} = 0,10 \cdot 10^{-3} \text{ W/m}^2, \quad L = 20 \lg \frac{p_s}{p_0} = 80 \text{ dB.}$$

7. Cîte surse sonore identice trebuie reunite pentru ca nivelul auditiv să crească cu $\Delta S = 10$ phon față de nivelul dat de o singură sursă?

$$R. \quad N = 10^{\Delta S/10} = 10.$$

8. La distanța $r = 20 \text{ m}$ de o sursă sonoră punctiformă de frecvență $\nu = 1 \text{ kHz}$ nivelul auditiv este $S = 20$ phon. La ce distanță sunetului nu se mai aude? (se neglijează absorbția în aer).

$$R. \quad r' = r \sqrt[10]{10^S/10} = 200 \text{ m.}$$

9. Un observator, situat la distanța $r_1 = 1,00 \text{ m}$ de un mic diapazon, măsoară un timp $t_1 = 3,3 \text{ s}$ de la momentul cînd aude sunetul emis de diapazonul lovit pînă în momentul cînd nu-l mai percepe. Situndu-se la o distanță $r_2 = 10,0 \text{ m}$ de diapazon, observatorul măsoară

acum un timp $t_2 = 10$ s, diapazonul fiind lovit identic. Să se calculeze coeficientul de amortizare b a vibrațiilor diapazonului (se neglijează absorbția sunetului în aer).

R.
$$b = \frac{2,3 \lg(t_2/t_1)}{t_1 - t_2} = 0,10 \text{ s}^{-1}.$$

10. Ce putere trebuie să aibă o sursă sonoră punctiformă de frecvență ν pentru ca la distanța r nivelul sonor să fie L , dB, știind că la frecvența ν pragul auditiv inferior este I_0 , și că coeficientul de atenuare a amplitudinii este κ ?

R.
$$P = 4\pi r^2 \kappa \nu I_0 \cdot 10^{L/10}.$$